

Vorgehensweise

In mehreren Versuchen wird die Abhängigkeit von Fadenpendeln untersucht, die durch ein elastisches Bindeglied miteinander verbunden sind, d.h. gekoppelt sind. Hierbei ist besonders zu beachten, daß Schwingungen in der Physik eine sehr große Rolle spielen, sie sind daher auch in der Elektrotechnik von großer Bedeutung. Deswegen werden in diesem Versuch die bereits bestehenden Erkenntnisse experimentell bewiesen.

Theorie

Zu den bereits bestehenden Erkenntnissen zählen u.a. die Formeln für die dynamische Grundgleichung der Drehbewegung $M = J\alpha$ ¹ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/T$ ¹.

Durch allgemeine Herleitungen ergeben sich daraus folgende Zusammenhänge

- | | | |
|---|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| ① | $M = J\alpha$ | dynamisches Drehmoment |
| ② | $M = -mgl\sin\phi$ | Drehmoment als Funktion des Winkels |
| ③ | $\alpha = d\omega * (dt)^{-1} = d^2\phi * (dt)^{-2} = \ddot{\phi}$ | 2. Ableitung des Winkels ϕ nach der Zeit |
| ④ | $D^* = mgl$ | Direktionsmoment |

Wenn man die Formel ④ in ② einsetzt und davon ausgeht, daß bei kleinen Winkeln der $\sin\phi = \phi$ ist und dann die Formeln ② und ③ in ① einsetzt, umformt, erhält man die Differenzialgleichung

$$J\ddot{\phi} + D^*\phi = 0$$

Durch weiteres umformen und Lösen der Differenzialgleichung erhält man den Zusammenhang

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{g}}$$

Für die Periodendauer des Pendels.

Um den Anforderungen der Aufgabenstellung gerecht zu werden, ist nicht nur die Schwingung eines Pendels zu betrachten, sondern auch das Verhalten zweier Pendel, die über eine Kopplungsfeder verbunden sind.

¹ Physikalische Formeln und Tabellen, Hammer/Hammer, J. Lindauer Verlag(Schaefer), München, Seite 19 ff

Aus diesem Ansatz heraus ergibt sich eine gekoppelte Differenzialgleichung der Art

$$J_1 \ddot{\phi}_1 = -D_1^* \phi_1 + D_f^1 (\phi_2 - \phi_1)$$

und

$$J_2 \ddot{\phi}_2 = -D_2 \phi_2 - D_f^* (\phi_2 - \phi_1)$$

Durch Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen und mit Hilfe folgender Substitution

$$\zeta = \phi_2 + \phi_1$$

und

$$\eta = \phi_2 - \phi_1$$

ergeben sich Gleichungen, die nachstehende Lösungsfunktionen haben:

$$\zeta = 2A_1 \cos(\Omega_1 t + \Psi_1)$$

und

$$\eta = 2A_2 \cos(\Omega_2 t + \Psi_2)$$

Wobei A_1 und A_2 den Amplituden, Ψ_1 Ψ_2 den Anfangsphasen und Ω_1 der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D^*}{J}}$$

entsprechen, wobei Ω_2 nur annäherungsweise der Kreisfrequenz entspricht (nur wenn davon ausgegangen wird, daß $D_f^* \ll D^*$ ist)

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D_f^*}{J}}$$

Nachdem die gekoppelte Differenzialgleichung nun gelöst ist, kann die Substitution wieder rückgängig gemacht werden und man erhält dann folgende Zusammenhänge:

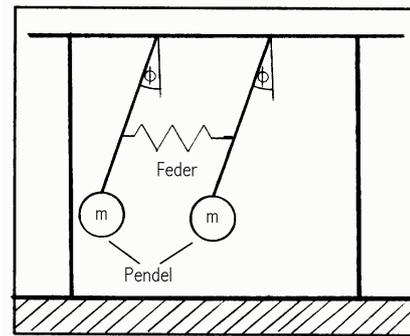
$$\phi_1 = A_1 \cos(\Omega_1 t + \Psi_1) - A_2 \cos(\Omega_2 t + \Psi_2)$$

$$\phi_2 = A_1 \cos(\Omega_1 t + \Psi_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \Psi_2)$$

Diese Gleichungen geben eine Aussage über das Schwingungsverhalten von gekoppelten Pendeln, wobei die Anfangsbedingungen noch berücksichtigt werden müssen, die durch drei verschiedene Fälle charakterisiert werden.

I. Fall *symmetrische Schwingung*

Die beiden Pendel werden um den gleichen Winkel ϕ ausgelenkt und zum Zeitpunkt t_0 sich selbst überlassen. Hierbei ist zu beobachten, daß sich die beiden Pendel gegenseitig nicht beeinflussen. Diese Erscheinung ist dadurch zu erklären, daß die Kopplungsfeder keiner Kraftänderung durch die Schwingung unterworfen ist (parallele Bewegung beider Pendel).



II. Fall *antisymmetrische Schwingung*

Bei dieser Art der Bewegung werden beide Pendel um den Betrag des Winkels ϕ ausgelenkt, allerdings in entgegengesetzter Richtung, wobei das System auch hier zum Zeitpunkt t_0 sich selbst überlassen wird. Auch bei dieser Anordnung ist zu beobachten, daß die Pendel trotz Krafteinwirkung auf die Kopplungsfeder von einander unabhängig schwingen. Dies beruht auf der Tatsache, daß die Kopplungsfeder auf beiden Seiten um den Betrag der Kraft F gedehnt wird. Aus dem 3. Gesetz von Newton folgt, daß die resultierende Kraft dabei gleich Null ist.

III. Fall *asymmetrische Schwingung (Schwebungsfall)*

Hierbei wird nur ein Pendel um den Winkel ϕ ausgelenkt und das System zum Zeitpunkt t_0 sich selbst überlassen. Dabei wird über die Kopplungsfeder dem schwingenden Pendel Energie entzogen und dem anderen zugefügt. Sobald das erste Pendel still steht, besitzt das zweite Pendel die volle Energie, danach läuft der Prozeß rückwärts ab. Dies wiederholt sich solange, bis die Schwingungsenergie über die Lager in Wärmeenergie umwandelt. Die Zeit von einem Stillstand eines Pendels bis zum nächsten nennt man Schwebungszeit τ , diese setzt sich wie folgt zusammen:

$$\frac{r'}{2} = \frac{2\pi}{\Omega_2 - \Omega_1} = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 - T_2} = \tau$$

Der Grad der Kopplung wird durch χ angegeben und wird folgendermaßen errechnet:

$$\chi = \frac{D_f^*}{D^* + D_f^*} = \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2 + T_2^2}$$

Versuchsdurchführung

Der Versuch wurde, wie auf dem Arbeitsauftrag gefordert, durchgeführt und alle Meßergebnisse auf beigelegtem Blatt festgehalten.

Zu a)

$$J = J_{cm} + r^2 m = \frac{1}{2} m r^2 + m r^2 = \frac{1 \text{ kg}}{2} (0,039 \text{ m})^2 + 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}^2 = 1,002282 \text{ kgm}^2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{m g r_p}{J}} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m g r_p}}$$

$$\Rightarrow r_p = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cdot \frac{J}{m g} = \frac{\pi^2}{s^2} \frac{1,002282 \text{ kgm}^2}{1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{1,0084 \text{ m}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{1 \text{ m gemessen}}}$$

Die unterschiedlichen Werte sind dadurch zu erklären, daß der Schwerpunkt des Pendels den rechnerischen Abstand hat, aber durch die Verbindungsstange (m=100g) wird der Schwerpunkt (Massenpunkt) in Richtung Drehzentrum verschoben → Abstand des Gewichtsstücks zum Drehzentrum muß größer werden, damit der Schwerpunkt dem rechnerischen Wert entspricht. Wobei der Meßfehler dabei nur 83‰ beträgt und daher zu vernachlässigt ist.

Zu b) Die Schwingungsdauer der gekoppelten Pendel ist gleich der Periodendauer eines Pendels (Vergleich mit Ergebnissen aus a1)

Zu c)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \underline{\underline{2,006 \text{ s} \pm 0,002 \text{ s}}} \quad f = \frac{1}{T} = 0,498 \text{ Hz} \pm 0,001 \text{ Hz}$$

Messung der Zeit von 10 Schwingungen

Meßreihe	1	2	3	4	5
t/s	19	18,8	19,7	19,0	19,1

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \underline{\underline{19,12 \text{ s}}} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2} = \underline{\underline{0,342 \text{ s}}}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{19,12 \text{ s}}{10} = \underline{\underline{1,912 \text{ s} \pm 0,034 \text{ s}}} \quad \Rightarrow \quad \Omega_2 = \frac{2\pi}{T_2} = \underline{\underline{3,286 \text{ Hz} \pm 0,060 \text{ Hz} / -0,054 \text{ Hz}}}$$

Zu d) Die gemessene Schwebungszeit beträgt rund 53,4s
Zur rechnerischen Bestimmung der Schwebungszeit muß vorher noch die Richtgröße der Feder bestimmt werden.

$$K = \frac{\Delta F}{\Delta x} = 1,496 \text{ Nm}^{-1} \pm \underline{\underline{9,37 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}}}$$

$$D_f^* = K l_f^2 = \underline{\underline{0,294 \text{ Nm}}} \pm \underline{\underline{1,86 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}}}$$

$$D^* = m g l = 2 D_f^* \frac{T_2^2}{T_1^2 - T_2^2} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \sqrt{\frac{T_2^2 2 D_f^*}{m g l} + T_2^2} = \underline{\underline{1,968 \text{ s}}}$$

$$\tau = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 - T_2} = \underline{\underline{67,206 \text{ s} \pm 310,83 \text{ s}}} \quad \Leftrightarrow \quad 53,4 \text{ s}$$

Fehlerrechnung

Fe := Fehler in entsprechender Messung

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{F}{x^2} \Rightarrow \text{Fehler}_K = \frac{0,05 \text{kg} \cdot 9,81 \text{Nkg}^{-1} \cdot 0,002 \text{m}}{(0,3235 \text{m})^2} = \underline{\underline{9,37 \cdot 10^{-3} \text{Nm}^{-1}}}$$

$$\frac{\partial D_f^*}{\partial K} = l_f^2 ; \frac{\partial D_f^*}{\partial l_f} = K 2l_f \Rightarrow \text{Fehler}_{D_f^*} = \sqrt{l_f^4 \cdot Fe_K^2 + (K 2l_f \cdot Fe_l)^2} = \underline{\underline{1,86 \cdot 10^{-3} \text{Nm}}}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial T_2} = \sqrt{\frac{2D_f^*}{mgl}} ; \frac{\partial T_1}{\partial D_f^*} = \frac{T_2}{\sqrt{\frac{2D_f^*}{mgl} + 1 \cdot mgl}} ; \frac{\partial T_1}{\partial l} = -\frac{T_2 \cdot D_f^*}{\sqrt{\frac{2D_f^*}{mgl} + 1 \cdot mgl}^2}$$

$$\Rightarrow \text{Fehler}_{T_1} = \sqrt{\frac{2D_f^*}{mgl} \cdot Fe_{T_2}^2 + \frac{T_2^2 \cdot Fe_{D_f^*}^2}{\left(\frac{2D_f^*}{mgl} + 1\right) \cdot (mgl)^2} + \frac{(T_2 \cdot D_f^* \cdot Fe_l)^2}{\left(\frac{2D_f^*}{mgl} + 1\right) \cdot (mgl^2)^2}} = \underline{\underline{8,21 \cdot 10^{-3} \text{s}}}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial T_1} = \frac{(T_1 - T_2)T_2 - T_1T_2}{(T_1 - T_2)^2} ; \frac{\partial \tau}{\partial T_2} = \frac{(T_1 - T_2)T_1 - T_1T_2}{(T_1 - T_2)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Fehler}_\tau = \sqrt{\left(\frac{(T_1 - T_2)T_2 - T_1T_2}{(T_1 - T_2)^2} \cdot Fe_{T_1}\right)^2 + \left(\frac{(T_1 - T_2)T_1 - T_1T_2}{(T_1 - T_2)^2} \cdot Fe_{T_2}\right)^2} = \underline{\underline{310,83 \text{s}}}$$

Fehlerbetrachtung

Bei der Durchführung des Versuches können folgende Ursachen Fehler erzeugen.

- Zeitverzögerungen beim stoppen der Periodendauer durch Reaktionszeit
Abhilfe durch vollelektronische Zeitmessung
- Ablesungenauigkeit bei den Längenmessungen und Zeitmessungen
Abhilfe durch Statistisch Auswertung vieler Meßreihen oder Paralaxespiegel
- Ungenauigkeit der Längenmesseinrichtung (Verkantung der Maßschieber \mp 2mm)
Statistische Auswertung mehrerer Meßreihen
- Unterteilungen der Meßgeräte sorgen für Ablesefehler (Schätzwerte)
Genauere Meßgeräte verkleinern die Fehler bzw. Statistische Auswertung mehrerer Meßreihen
- Reibungsverluste in den Lagern
Abhilfe durch Druckluftlagert
- Pendelauslenkung kann differieren bei antisymmetrie
Abhilfe durch geeignete Startvorrichtung
- Geringe Pendelbewegung des „Stillstehenden“ Pendels beim Schwebungsfall
Abhilfe durch geeignete Start- und Aufzeichnungsvorrichtung