Protokoll

zum
Physikpraktikum

Versuch Nr.: 3
Gekoppelte Schwingungen

Gruppe Nr.: 1

Theoretische Grundlagen

Mathematisches Pendel:
Bei einem mathematischen Pendel ist ein Massepunkt an einem Ende eines masselosen Faden befestigt. Das andere Ende des Fadens ist an einem Festpunkt angebracht.

Physikalisches Pendel:
Bei einem Physikalischen Pendel tritt ein starrer, massenbehafteter Körper an Stelle des Seiles. Man kann hier auch nicht mehr von einem Massepunkt reden, da sich die Masse über den Körper verteilt. Statt dessen muß man nun den Schwerpunkt betrachten. Um das Physikalische- dem Mathematischen Pendel anzunähern muß man versuchen den Schwerpunkt möglichst weit vom Drehpunkt zu entfernen. Dies kann durch Anbringen eines Gewichtes am unteren Ende des Pendels und durch Verlängerung des Hebelarms geschehen.

Kopplung zweier Pendel:
Wenn man zwei Pendel elastisch miteinander verbindet nennt man sie gekoppelt. Dabei ist zu beachten, daß die Kräfte eines jeden Pendels Auswirkungen auf die Schwingung des anderen Pendels haben.

Die Pendelbewegung ist im wesentlichen eine Drehbewegung. Daher lassen sich die Formeln zur Berechnung der Pendelbewegung aus Formeln und Größen der Drehbewegung herleiten.

Betrachten wir zunächst das Einzelpendel.
Wenn man das Pendel aus der Ruhelage bringt, entsteht ein rückstellendes Drehmoment *M*, das sich aus der Rückstellkraft und der Auslenkung zusammensetzt. Die Rückstellkraft besteht hierbei aus Masse *m* und Erdbeschleunigung *g*. Die Auslenkung erhält man durch den Sinus des Auslenkwinkels α multipliziert mit dem Abstand zur Drehachse *l*. Man erhält also:

$M = -mgl \sin\alpha$ für kleine Winkel gilt $\sin\alpha = \alpha$ also $M = -mgl\alpha$

Die Winkelrichtgröße *D* ist demnach hier $D = mgl$.

Aus der Drehschwingung ist folgende Beziehung zwischen Winkelgeschwindigkeit ω, Periodendauer T (Zeit, die für eine vollständige Schwingung benötigt wird), Winkelrichtgröße und Massenträgheitsmoment J bekannt:

$$\frac{2\pi}{T} \qquad \frac{D}{J}$$

Umgestellt nach T und D als mgl ausgedrückt erhält man:

$$T = 2\pi$$

Da $J = ml^2$ entspricht diese Formel der Formel für das Mathematische Pendel:

$$T = 2\pi$$

Betrachten wir nun die Kopplung zweier Pendel:
Zwei Pendel werden wie im Bild 3.1 gezeigt mit einer Feder miteinander verbunden. Die Feder leitet die Schwingungen von dem einen Pendel auf das andere über.

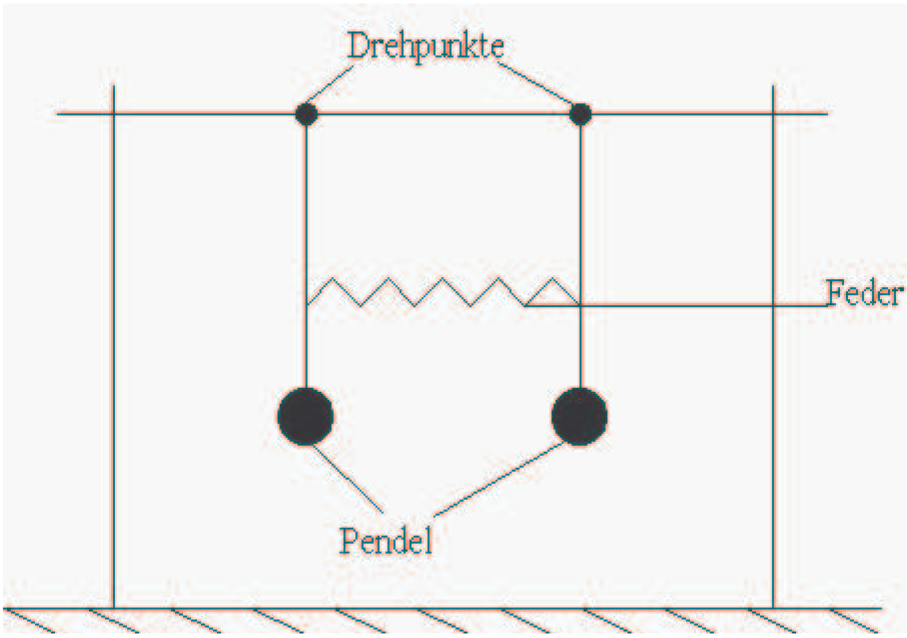

Bild 3.1

Die Feder bzw. ihr Drehmoment wirkt mit auf das System ein. Hierzu muß man folgendes betrachten:

Das Drehmoment des Pendels läßt sich auch schreiben:

$$M = J\ddot{\alpha}$$

Daraus ergibt sich:

$$J\ddot{\alpha} = -D\alpha$$

Nun muß man das Drehmoment der Feder zu dieser Gleichung addieren. Da die Feder dieses Drehmoment aber auf beide Pendel in entgegengesetzter Richtung ausübt, erhält man zwei Drehmomente der Feder:

$$M_1 = D_f(\alpha_2-\alpha_1)$$
$$M_2 = -D_f(\alpha_2-\alpha_1)$$

Wobei D_f das Direktionsmoment darstellt, daß durch die Feder erzeugt wird. Es berechnet sich aus der Federkonstanten K und dem Abstand der Feder von den Drehachsen r:

$$D_f = Kr^2$$

Eingesetzt in die Formel für das Pendel erhält man:

$$J\ddot{\alpha}_1 = -D\alpha_1+D_f(\alpha_2-\alpha_1)$$
$$J\ddot{\alpha}_2 = -D\alpha_2-D_f(\alpha_2-\alpha_1)$$

Bei diesen Gleichungen handelt es sich um „gekoppelte Differenzialgleichungen. Jede Gleichung enthält α_1 und α_2 Um Berechnungen auszuführen ist es wichtig diese Gleichungen zu entkoppeln.
Man addiert nun die beiden Gleichungen und ersetzt $(\alpha_2+\alpha_1)$ durch c:

$$J\ddot{c} = -Dc$$

Nun subtrahiert man die beiden Gleichungen und ersetzt $(\alpha_2-\alpha_1)$ durch n:

$$J\ddot{n} = -Dn-2D_fn$$

Nun sind die beiden Gleichungen nicht mehr gekoppelt. Es ergeben sich die Kreisfrequenz ω und damit auch die Periodendauer T:

$$\omega_1 = \qquad\qquad\qquad T_1 = 2\pi$$

$$\omega_2 = \qquad\qquad\qquad T_2 = 2\pi$$

Für die Kreisfunktion nutzt man hier die Amplituden A_1 und A_2 und die Anfangsphasen φ_1 und φ_2. Man erhält die Gleichungen:

$$c = 2A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$$
$$n = 2A_2\cos(\omega_2 t-\varphi_2)$$

Macht man nun das Einsetzen von c und n rückgängig erhält man für die Bewegung der Pendel:

$$\alpha_1 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)-A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$
$$\alpha_2 = A_1\cos(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$$

Durch diese zwei Gleichungen lassen sich die Bewegungen der beiden Pendel beschreiben.
Wie die Schwingungen des einen Pendels auf das andere wirken hängt von den Anfangsbedingungen ab, die herrschen, bevor man das System sich selbst überläßt. Hierbei unterscheidet man drei typische Fälle.

Fall 1 - symmetrische Schwingungen:
Man lenkt beide Pendel um den gleichen Winkel α in die gleiche Richtung aus. Wenn man nun die Pendel schwingen läßt, wird die Feder nicht gedehnt und übt somit auch keine Schwingungsübertragung aus. Die Pendel schwingen wie zwei Einzelpendel.

Fall 2 - antisymmetrische Schwingungen:
Man lenkt beide Pendel um den gleichen Winkel α in die entgegengesetzte Richtung aus ($\alpha_1 = -\alpha_2$) und ($A_1 = A_2$). Läßt man die Pendel los, so schwingen diese gegenphasig (Phasenverschiebung = π) aufeinander zu beziehungsweise von einander weg. Die Mitte der Feder bleibt dabei aus Symmetriegründen in der Ruhelage.

Fall 3 - Schwebung

Man lenkt ein Pendel aus und beläßt das zweite in der Ruhelage. Läßt man Pendel 1 los, so schwingt es um seine Ruhelage. Dabei nimmt die Koppelfeder einen Teil der Schwingungsenergie auf und leitet diese auf Pendel 2 ab. Pendel 2 beginnt nun zu schwingen. Wenn Pendel 1, nach einigen Schwingungen,seine Schwingungsenergie verloren hat, besitzt Pendel 2 soviel Energie, wie Pendel 1 direkt nach dem Loslassen. Dieser Zustand ist aber nicht stabil, da durch die Kopplung nun die Schwingungsenergie an Pendel 1 überträgt. Nun schwingt Pendel 1 wieder. Wie man sieht wiederholt sich der gesamte Vorgang. Die Zeit zwischen zwei Stillständen in der Ruhelage eines Pendels bezeichnet man als Schwebungszeit τ.
Hier liegen folgende Anfangsbedingungen vor:

$$\alpha 1 = 0 \qquad \alpha 2 = A \qquad A1 = A2 = \text{-----}$$

Durch einerseits Addition von *c* zu *n* und andererseits Subtraktion von *n* von *c* erhält man:

$$\alpha_1 = \text{-----}\ (\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)$$

$$\alpha_2 = \text{-----}\ (\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t)$$

Wenn man die Summen der Cosinusform in Produkte umwandelt erhält man:

$$\alpha_1 = A \sin\text{----------}\ t \sin\text{----------}\ t$$

$$\alpha_2 = A \cos\text{----------}\ t \cos\text{----------}\ t$$

Daher gilt für die Schwebungszeit τ folgende Gleichung:

$$\begin{matrix} T_1T_2 & \qquad \omega_2-\omega_1 \\ T_1-T_2 & \qquad 2\pi \end{matrix}$$

Unter dem Kopplungsgrad χ versteht man folgendes Verhältnis zwischen den Direktionsmomenten der Feder und des Pendels:

$$\begin{matrix} D_f \\ D+D_f \end{matrix}$$

Da man die Schwingungsdauer messen kann, drückt man den Kopplungsgrad damit aus:

$$\frac{T_1^2-T_2^2}{T_1^2+T_2^2}$$

Der Kopplungsgrad bewegt sich zwischen 0 (=keine Kopplung) und 1 (=stare Kopplung.

Versuchsbeschreibung:

Wir haben sowohl die Messungen am freien Pendel als auch die Messungen bei den drei Fällen entsprechend der Verduchsanleitung durchgeführt. Die Meßergebnisse wurden in ein beigelegtes Meßprotokoll eingetragen.

Meßergebnisse:

Die Ergebnisse der Messungen sind dem beigelegten Meßprotokoll zu entnehmen.
Die Schwingungsperiode beträgt nicht, wie in der Versuchsanleitung angegeben, 1s sondern 2s.

<u>Zum freien Pendel:</u>
Für die Schwingungsperiode erhält man:

$$\frac{1*60s}{30}$$

Berechnung des Trägheitsmometes des Pendels (Pendelscheibe und Stange):

$$J = ----m_1l_1^2+m_2l_2^2 \quad => \quad J = ----*0,1kg*1,039^2m^2+1kg*1^2m^2 = 1,036kgm^2$$

Stellt man nun die Formel für *T* nach *l* um, so erhält man den Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse l_S:

$$\frac{4J\pi^2}{mgT^2} \qquad \frac{4*1,036kgm^2*\pi^2}{1,1kg*9,81^m/_s*4s^2}$$

Um nun daraus die Länge l_1 (Drehachse - Scheibenmittelpunkt zu berechnen muß man den Steinerschen Satz zuhilfe nehmen.
Ein Körper, der sich um eine Achse außerhalb seines Schwerpunktes dreht, dreht sich mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit um die Achse, die parallel zur anderen Achse durch seinen Schwerpunkt geht.
Laut Steiner lassen sich die Trägheitsmomente folgendermaßen additiv zusammensetzen:

$$J = J_S + ml^2$$

Wenn man J in der Gleichung für T durch J_S+ml^2 ersetzt und nach l umstellt erhält man l_1:

$$\frac{(T^2/4\pi^2 mg)-mls^2}{m}$$

Wenn man die Formel für das mathematische Pendel nach l umstellt, erhält man für l_1:

$$l_1 = \text{-------}g \qquad \Rightarrow \qquad l_1 = 0{,}994\text{m}$$

Zum symmetrischen Fall:
Aus dem Meßprotokoll läßt sich gut erkennen, das die Schwingungen denen des freien Pendels entsprechen. Die Koppelfeder wirkt also nicht auf die Schwingungen der Pendel.

Zum antisemitrischen Fall:
Hier erhält man T_2 und ω_2 nach folgenden Formeln:

$$\frac{1*111\text{s}}{60} \qquad \frac{2\pi}{T_2} \qquad \frac{2\pi}{1{,}85\text{s}}$$

Zum Schwebungsfall:
Um den Schwebungsfall zu untersuchen, muß man zunächst die Federkonstante K aus der gemessenen Längenänderung Δl und der Masse m des angehängten Gewichtes errechnen:

$$\frac{F}{\Delta l} \qquad \frac{mg}{\Delta l} \qquad \frac{0{,}05kg*9{,}81\,{}^{m}/{}_{s}{}^{2}}{0{,}335m}$$

Nun lassen sich aus den gemessenen und berechneten Größen alle Zustandsgrößen der Schwebung bestimmen:

$D =$

$D_f =$

$\omega_1 =$

$\omega_2 =$

$T_1 =$

$T_2 =$

$\tau =$

$\chi =$

Fehlerbetrachtung:

Folgende Fehler können entstehen:
- Ablesefehler an der Stoppuhr
- Ablesefehler am Lineal
- Fehler durch die Reaktionszeit des Stoppuhrbedieners
- Ungenauigkeit der Stoppuhr
- Pendel nicht gleichzeitig losgelassen (bei Antisymmetrie)
- ein Pendel losgelassen, obwohl das andere Pendel noch nicht in Ruhestellung war (bei Schwebung)
- Zeit unmittelbar vor bzw. nach dem Stillstand des Pendels gestoppt (bei Schwebung)
- Verkanten der Pendelstange an der Aufhängung während des Schwingens
- Pendel nicht mit der gleichen Amplitude ausgelenkt (bei Symmetrie und Antisymmetrie)
- Pendel mit zu großer Amplitude ausgelenkt ($\sin\alpha \neq \alpha$)

zu Fehlerbetrachtung:

Die Ablesefehler der Stoppuhr $\Delta t = 1s$ und des Lineals $\Delta l = 1mm$ lassen sich bestimmen und daraus die Abweichungen Δx der berechneten Werte x_0 bestimmen:

$\Delta x = \text{------}\Delta t$ bzw: $\Delta x = \text{------}\Delta l$

Der Wert x ergibt sich dann immer wie folgt: $x = x_0 \pm \Delta x$.
Für die hier berechneten Werte ergibt sich: