Gruppe: A2
Karsten Klein (Protokollant)
Sky Lemke

Versuchsprotokoll
zum Versuch Nr. 2
„Drehbewegungen“
vom 11.03.1997

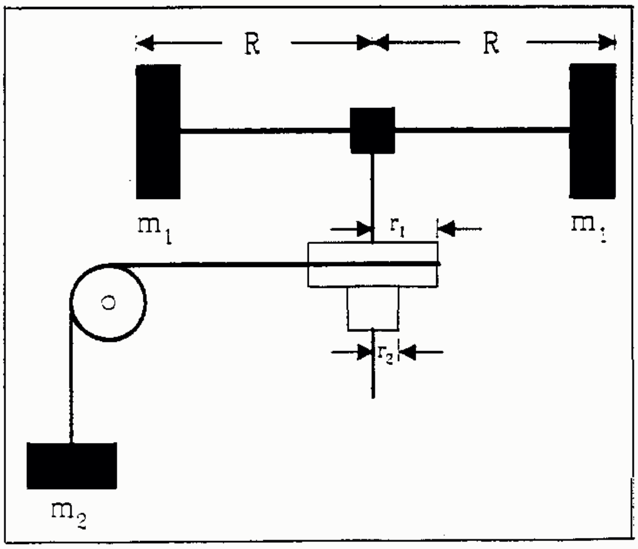
Künzell, den

2.1 Gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung

2.1.1 Winkelbeschleunigung

Versuchsdurchführung

Wir beginnen damit, die Durchmesser der beiden Walzen (siehe Grafik) mit dem Zentimetermaßstab zu bestimmen. Für die kleine Walze ergibt sich ein Wert von r2=0,5cm, bei der großen Walze messen wir r2=1cm. Der Abstand vom Mittelpunkt der Achse bis zum äußeren Rand der Massen beträgt R=28cm.



Wir befestigen an beiden Enden des Stabes die Massen m1=100g, so daß sich eine symetrische Massenverteilung ergibt. Das Seil Wickeln wir auf die kleine Walze mit dem Radius r2=0,25cm auf und führen es über eine Umlenkrolle, die am Tisch befestigt ist. Am Ende des Seils hängen wir hängen wir die Masse m2=50g. Diese Masse übt jetzt durch ihre Gewichtskraft eine Kraft auf das Seil und die Walze aus. Das daraus resultierende Drehmoment bringt die Achse zum Drehen.

Um die Zeiten, die für einen Umlauf benötigt wird, zu ermitteln, bauen wir eine Lichtschranke so auf, das der Lichtstrahl vom Hantelarm bei jeder halben Umdrehung unterbrochen wird. Eine elektronische Stoppuhr mißt die Zeit die zwischen den Strahlunterbrechungen liegt. Da wir aber nur die Zeiten für ganze Umdrehungen messen wollen, stellen wir die Stoppuhr so ein, daß sie nur jede zweite Unterbrechung berücksichtigt. Die einzelnen Zeiten werden gespeichert, um sie nach einem Versuchsdurchgang abzurufen. Wir positionieren den Hantelarm so, daß er kurz vor der Lichtschranke losläuft. Dies ist notwendig, damit die Geschwindigkeit beim ersten Unterbrechen des Lichtstrahls annähernd Null ist. Die Stoppuhr läuft mit der ersten Unterbrechung des Lichtstrahls los und wenn die Lichtschranke das dritte Mal unterbrochen wurde, also wenn genau eine Umdrehung herum ist, wird die Zeit, die für eine Umdrehung gebraucht wurde gespeichert. Nach der nächsten ganzen Umdrehung, also bei der fünften Unterbrechung der Lichtschranke, wird wieder die Zeit gespeichert, die für die letzte volle Umdrehung gebraucht wurde. Dies geht dann bis zur 6. Umdrehung so weiter. Danach wird das ganze angehalten und die Zeiten der einzelnen Umdrehungen notiert. Dabei ist festzustellen, daß die benötigte Zeit für eine Umdrehung immer kürzer wird. Es handelt sich folglich, wie auch zu erwarten war, um eine beschleunigte Bewegung. Das ganze wird dann noch dreimal wiederholt, wobei sich in etwa identische Zeiten einstellen. Die Differenzen kommen dadurch zustande, daß der Stab nicht immer exakt an der gleiche Stelle kurz vor der Lichtschranke positioniert war. Der Stab hatte also beim passieren der Lichtschranke schon eine leicht unterschiedliche Anfangsgeschwindigkeit. Außerdem ist es möglich, daß beim loslassen des Stabes, ein leichter Stoß durch Handzittern auf diesen ausgeübt wurde. Die Abweichungen sind allerdings nur minimal, und werden durch die Mehrfachmessung rausgemittelt.

Umläufe n	1	2	3	4	5	6
Zeit t	7,64	4,02	3,16	2,72	2,45	2,24
Zeit t	8,45	4,08	3,17	2,70	2,41	2,21
Zeit t	8,14	3,99	3,14	2,72	2,44	2,22
Zeit t	8,39	4,03	3,12	2,70	2,42	2,22
Mittelwert	8,16	4,03	3,15	2,71	2,43	2,22

alle Zeiten in Sekunden (s)

Die Mittelwerte werden nach folgender Formel berechnet: $t = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n}$

Der Versuch wird anschließend noch einmal durchgeführt, nur daß diesmal die Massen m1=200g betragen. Es werden ebenfalls die kleine Walze mit r2=0,5cm und die Masse m2=50g verwendet und es werden auch wieder 6 Umdrehungen gemacht und die Zeiten der einzelnen Umdrehungen gestoppt .

Umläufe n	1	2	3	4	5	6
Zeit t	11,17	5,49	4,31	3,73	3,31	3,05
Zeit t	11,29	5,40	4,23	3,65	3,28	3,02
Zeit t	11,23	5,58	4,38	3,72	3,33	3,07
Zeit t	11,81	5,63	4,36	3,74	3,38	3,08
Mittelwert	11,38	5,52	4,32	3,71	3,33	3,06

alle Zeiten in Sekunden (s)

Wie oben erwähnt handelt es sich um eine beschleunigte Bewegung. Bei geradlinigen Bewegungen wird die Beschleunigung a nach folgender Folrmel berechnet:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Diese Formel läßt sich nicht direkt auf ein Drehbewegung anwenden. Die Geschwindigkeit v läßt sich bei einer Drehbewegung nicht so einfach bestimmen, da die Geschwindigkeit eines Punktes auf der Kreisscheibe auch vom Abstand von der Drehachse abhängt. Deshalb führt man die Winkelgeschwindigkeit ω ein.

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist dabei der Quotient aus dem Drehwinkel $\Delta\varphi$ und dem Zeitabschnitt Δt. Zu beachten ist dabei, daß der Winkel nicht im Gradmaß sondern im Bogenmaß angegeben wird, wobei 2π dem vollen Kreis, also 360° entspricht.

Die Beschleunigung wird bei Drehbewegungen mit α bezeichnet.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

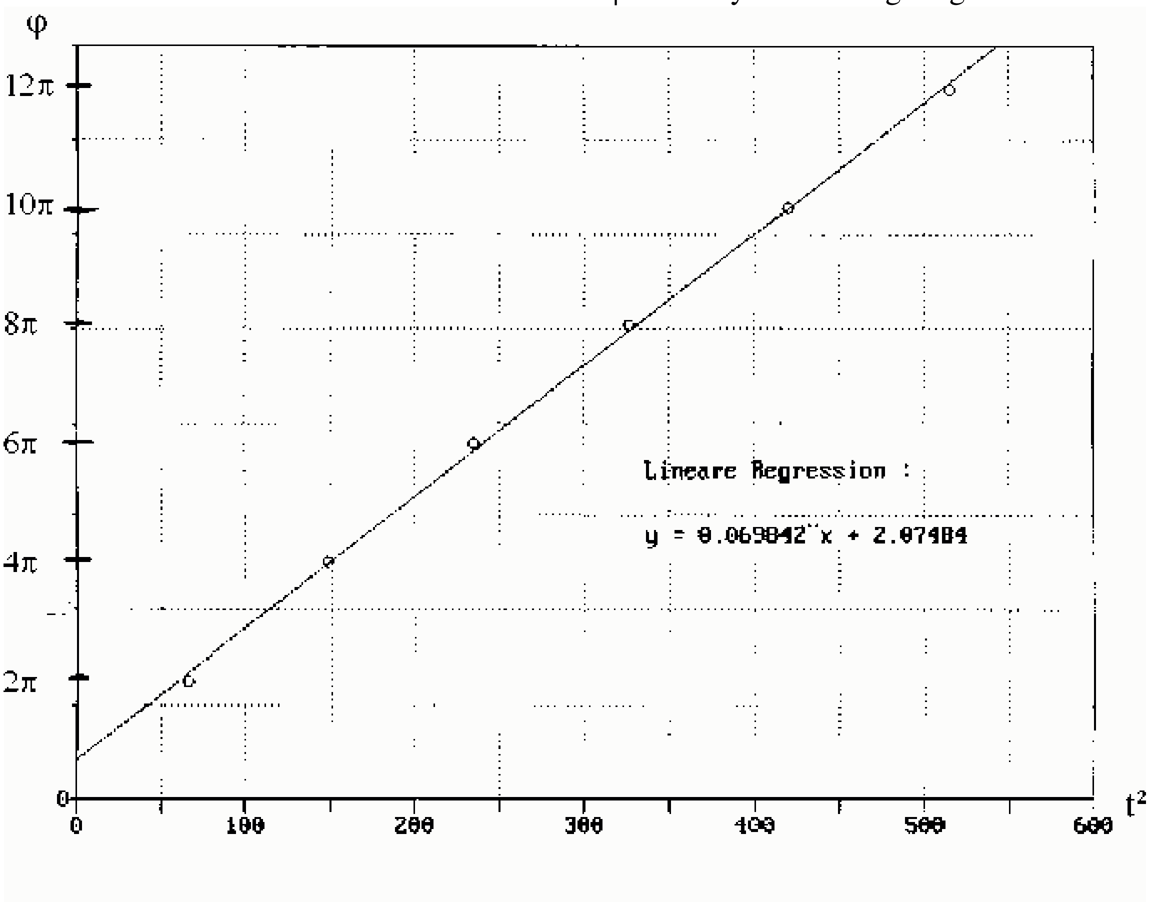
Wie man sehen kann, erfolgt die Berechnung der Beschleunigung, d.h. Winkelbeschleunigung, analog zur Beschleunigung von geradlinigen Bewegung, nur daß die Geschwindigkeit v durch die Winkelgeschwindigkeit ω ersetzt wird.

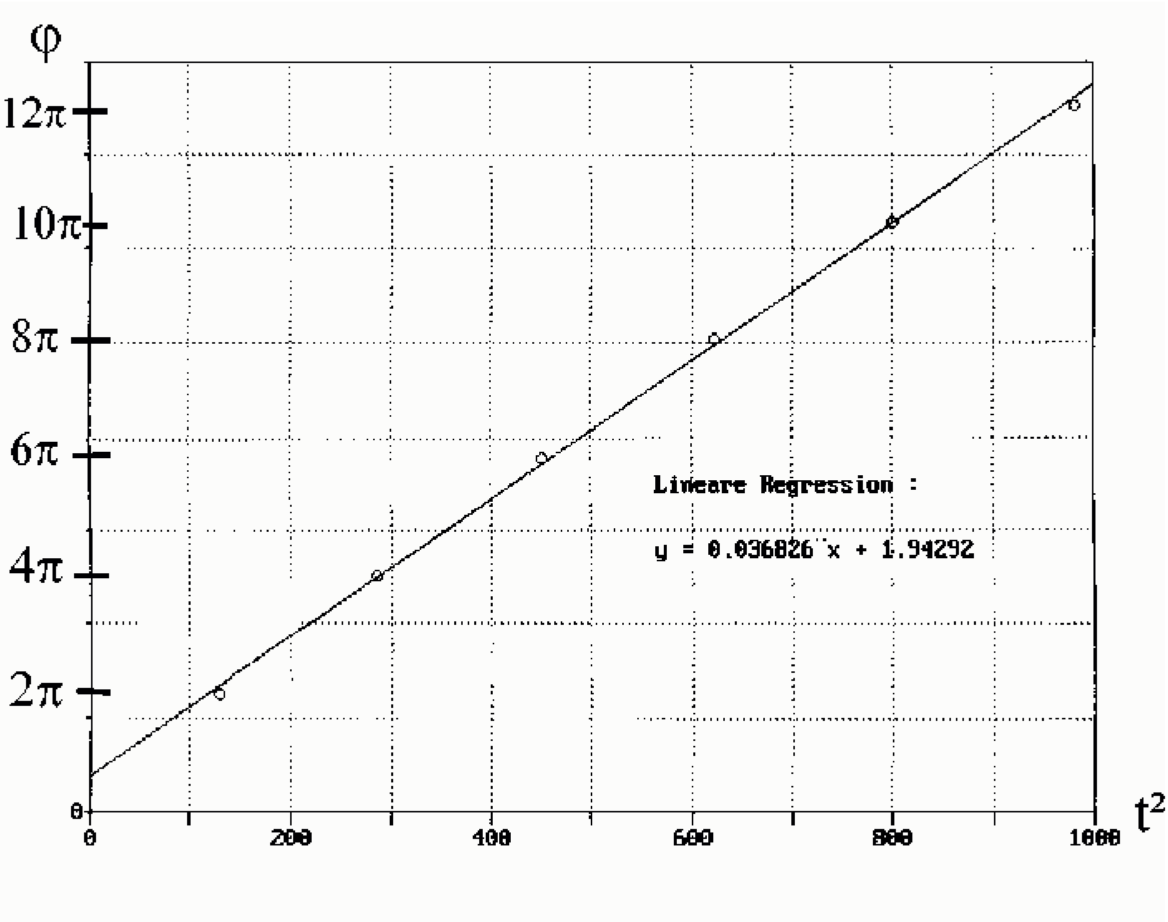
In der folgenden Tabelle sind die Zeiten (Mittelwerte) mit den zugehörenden Umdrehungen der beiden oben genannten Versuche aufgeführt.

Umläufe	2 o	4 o	6 o	8 o	10 o	12 o
Versuch 1						
Zeit t	8,16	12,19	15,34	18,05	20,48	22,7
t²	66,59	148,6	235,32	325,8	419,43	515,29
Versuch 2						
Zeit t	11,38	16,9	21,22	24,93	28,26	31,32
t²	129,5	285,61	450,29	621,5	798,63	980,94

alle Zeiten t in s, t^2 in s^2

Nun Tragen wir die in der Tabelle aufgeführten Wertepaare in ein Koordinatesystem ein, wobei t^2 auf der x-Achse und der Drehwinkel φ auf der y-Achse aufgetragen wird.





In die Koordinatensysteme (das 1. für den Versuch 1, mit m1=100g, das 2. für den 2. Versuch, mit m1=200g) sind die einzelnen Meßwerte als kleine Kreise eingetragen worden. Sie bilden fast eine gerade Linie. Anschließend wurde eine Gerade, die durch Lineare Regression ermittelt wurde, hineingelegt. Die Gerade hat die allgemeine Formel y=ax+b. a wird dabei wie folgt ermittelt.

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 284{,}66$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 21{,}99$$

$$a = \frac{47360 - 6 \cdot 284{,}66 \cdot 21{,}99}{628027 - 6 \cdot 284{,}66^2} = 0{,}069$$

$b = \bar{y} - a\bar{x} = 21{,}99 - 0{,}069 \cdot 284{,}66 = 2{,}3$

Die Ausgleichsgerade ist demnach y=0,069x+2,3. Wenn man in die Koordinatensysteme sieht stehen dort in der Formel für die Ausgleichsgerade leicht unterschiedlich Werte. Das kommt daher, daß diese vom Computer mit einer höheren Genauigkeit berechnet wurden. Die Berechnung von Hand ist dagegen sehr schreibintensiv und durch Rundungen relativ ungenau. Deshalb soll hier auch nur einmal exemplarisch an dem ersten Versuch gezeigt werden wie es von Hand geht.

Die ermittelte nun eine Steigung die genau der Beschleunigung α entspricht, denn die Steigung einer Gerade ist wie folgt definiert:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t \cdot \Delta t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t^2}$$

Das entspricht der Steigung der Geraden; α=0,069 rad/s² im 1. Versuch.

Allerdings stimmt dieser Wert für die Beschleunigung nicht ganz, da die Beschleunigung zum Zeitpunkt 0, also wenn sich das Ganze noch nicht dreht, eigentlich auch Null sein müßte. Wie man allerdings sehen kann geht in beiden Fällen, die Gerade nicht durch den Nullpunkt, das b in der Geradengleichung ist nicht gleich Null. Dies liegt wahrscheinlich an der Messung mit der Lichtschranke. Wie zuvor schon bemerkt ließen wir den Hantelarm von kurz vor der Lichtschranke losdrehen. Die Hantel bewegte sich also schon ein kleines Stück, als sie die Lichtschranke passierte und damit hatte sie natürlich auch schon eine Anfangsgeschwindigkeit. Deshalb ist die Gerade vermutlich auf der y-Achse nach oben verschoben.

Mit Hilfe der Winkelbeschleunigung α und des Drehmomentes M können wir nun das Massenträgheitsmoment J berechnen. Das Drehmoment läßt sich aus der Masse m2 und dem Radius r1 berechnen.

$$M = F \cdot l$$

$$F = m \cdot g$$

$$M = m_2 \cdot g \cdot r_2$$

$$I = \frac{M}{\alpha} = \frac{m_2 \cdot g \cdot r_2}{\alpha}$$

Für den ersten Versuch, mit m1=100g, Walze mit r2=0,5cm und m2=50g, ergibt sich ein Massenträgheitsmoment von:

$$I = \frac{m_2 \cdot g \cdot r_2}{\alpha} = \frac{50g \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5cm}{0{,}0698\frac{rad}{s^2}} = 0{,}035kgm^2$$

Das Massenträgheitsmoment läßt sich auch theoretisch berechnen, wobei dies nur in Näherung erfolgen kann, und zwar mit folgender Formel:

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2 = 2 \cdot 0{,}1kg \cdot (0{,}28m)^2 = 0{,}016kgm^2$$

Für den Zweiten Versuch (m1=200g, r2=0,5cm, m2=50g)

$$I = \frac{m_2 \cdot g \cdot r_2}{\alpha} = \frac{50g \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}5cm}{0{,}0368\frac{rad}{s^2}} = 0{,}0666kgm^2$$

Theoretisch:

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2 = 2 \cdot 0{,}2kg \cdot (0{,}28m)^2 = 0{,}031kgm^2$$

Wie man sehen kann weichen die Werte erheblich von den errechneten ab, was von folgenden Fehlern abhängt:

1. In die gemessenen Massenträgheitsmomente geht die Beschleunigung ein, die wie zuvor schon festgestellt, nicht genau ist.
2. Die teoretischen Werte berücksichtigen nicht den Stab, der zwar aus Aluminium war und somit kaum eine Masse darstellt, aber trotzdem das Ergebnis beinflussen würde.
3. Der gemessene Wert wird durch Reibung verfälscht, da die Reibung die Bewegung verlangsamt, und so die Beschleunigung geringer ist. Wäre die Beschleunigung höher, würde das Massenträgheitsmoment geringer, sich also dem theoretischen Wert nähern.

Das tatsächlich Massenträgheitsmoment liegt also irgendwo zwischen den beiden Werten, wo genau kann nicht gesagt werden, da nicht bekannt ist inwieweit die einzelnen Fehler das Ergebnis beinflussen.

2.1.2 Rotationsenergie

Der Versuchsaufbau bleibt im Prinzip der gleiche, wie oben beschrieben. Die einzigsten Unterschiede sind, daß diesmal die große Walze mit r1 verwendet wird, die Masse m2=100g beträgt, und daß nur noch 5 Umdrehungen gemacht werden, statt 6. Außerdem wird die Messung nicht dreimal wiederholt, sondern viermal.

Umläufe n	1	2	3	4	5
Zeit t	6,24	2,98	2,30	1,95	1,73
Zeit t	5,90	2,89	2,27	1,93	1,71
Zeit t	6,19	2,93	2,26	1,93	1,71
Zeit t	6,12	2,92	2,28	1,94	1,72

Zeit t	6,13	2,96	2,25	1,95	1,72
Mittelwert	6,12	2,94	2,27	1,94	1,72

alle Zeiten in Sekunden (s)

Die Berechnung der Winkelgeschwindigkeit ω und Bahngeschwindigkeit v am Ende des 5. Umlaufes geht wie folgt:
Die Winkelgeschwindigkeit ist der Quotient aus der Änderung des Drehwinkels und der dafür nötigen Zeit.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{1{,}72s} = 3{,}65\frac{rad}{s}$$

Die Bahngeschwindigkeit ändert sich mit dem Radius R von der Achse. Da alle Punkte auf der Kreisscheibe in der selben Zeit sich um die Achse drehen, dies aber mit unterschiedlichem Abstand zur Achse, ist ihre Bahngeschwindigkeit unterschiedlich groß; außen hoch, in der nähe der Achse niedrig. Die Bahngeschwindigkeit berechnet sich daher wie folgt:

$$v = r \cdot \omega = r \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

In unserem Fall, bewegen sich die Massen am Ende des Stabes mit der Geschwindigkeit

$$v = 28cm \cdot \frac{2\pi}{1{,}72s} = 0{,}326\frac{m}{s}.$$

Berechnung der Rotationsenergie nach dem 5. Umlauf
Die Berechnung der Rotationsenergie erfolgt analog zur Berrechnung derkinetischen Energie.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Nun muß man die Geschwindigkeit nur noch durch die Winkelgeschwindigkeit und die Masse durch das Massenträgheitsmoment ersetzt werden, und wir erhalten die Rotationsenergie.

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

Die Winkelgeschwindigkeit haben wir bereits bestimmt. Das Massenträgheitsmoment errechnen wir nach folgender Formel:

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

Hierbei wird das Produkt aus der Masse des einzelnen Teilchen und dessen Abstand von der Drehachse zum Quadrat aufsummiert. In unserem Fall betrachten wir die beiden Massen am Ende des Stabes als Massepunkte. Der Stab selbst wird, der Einfachheit halber, als masselos angesehen, was der Realität relativ nahe kommt, da der Stab aus Aluminium besteht. Es ergibt sich also ein I von

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = 2 \cdot 0{,}2kg \cdot (0{,}28m)^2 = 31{,}36 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

Damit können wir nun die Rotationsenergie berrechnen.

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 31{,}36 kg \cdot m^2 \cdot 10^{-3} \cdot \left(3{,}65 \frac{rad}{s}\right)^2 = 0{,}209 Nm$$

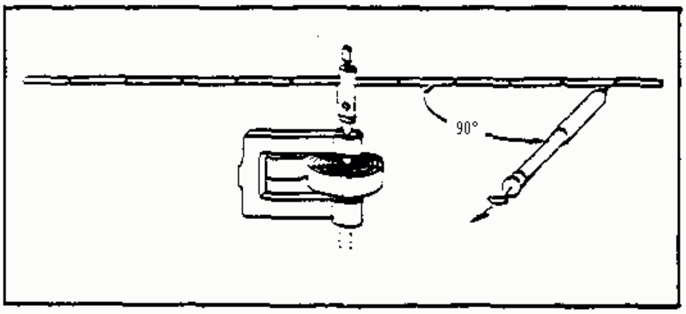
Die freiwerdende potentielle Energie des Gewichtsstückes m2 wird wie folgt errechnet.

$$E_{pot} = m_2 \cdot g \cdot \Delta h = m_2 \cdot g \cdot 5 \cdot 2 \cdot r_1 \cdot \pi = 0{,}1 kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 0{,}01 m \cdot \pi = 0{,}308 Nm$$

Wie man sieht ist die freiwerdende potentielle Energie um ca. 0,1Nm größer als die Rotationsenergie. Dieser Unterschied ist dadurch zu erklären, daß unser Versuchsaufbau nicht Reibungsfrei ist, d.h. es wird ein Teil der Energie in Wärme umgesetzt, die dann an die Umgebung abgegeben wird. Außerdem wird noch ein sehr geringer Teil in kinetische Energie des Gewichtsstücks m2 umgewandelt (etwa $20.7 \cdot 10^{-6}$ Nm).

2.2 Drehpendel

2.2.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße Dr



In diesem Versuch benutzen wir ein Drehpendel. Es besteht aus einer drehbar gelagerten Achse die über eine Spiralfeder mit dem Rahmen verbunden ist (siehe Grafik). Auf die Achse ist quer ein Stab aufgesteckt. Wenn man den Stab aus seiner Ruheposition bringt, wird die Feder gespannt und übt eine Kraft, genauer gesagt Drehmoment, auf den Stab aus. Diese wollen wir mit einem 1N-Kraftmesser messen. Dazu drehen wir die Achse um 180° aus der Ruhelage und messen die Kraft die dazu nötig ist in verschiedenen Abständen von der Achse mit dem Kraftmesser. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.
Aus den gemessenen Kräften und den dazugehörenden Abständen von der Dehachse, können wir das Drehmoment M berechnen.

$$M = F \cdot r$$

r	F	M
0,1m	0,85N	0,085 Nm
0,15m	0,55N	0,0825 Nm
0,2m	0,4N	0,08 Nm
0,25m	0,3N	0,075 Nm
0,3m	0,26N	0,078 Nm

Eigentlich hätten alle Drehmomente gleich groß sein müssen, leider war diese Messung nicht sonderlich genau. Der Grund dafür ist darin zu suchen, daß das Drehpendel von Hand um 180° ausgelenkt wurde und dabei der Winkel nach Augenmaß bestimmt wurde. Deshalb bilden wir den Mittelwert der Messungen der dann lautet:

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i = 0{,}0801 Nm$$

Damit läßt sich nun die Winkelrichtgröße D_r bestimmen. Sie ist der Quotient aus dem Drehmoment D und dem Winkel φ.

$$D_r = \frac{D}{\varphi} = \frac{0{,}0801 Nm}{180°} = \frac{0{,}0801 Nm}{\pi} = 0{,}0255 Nm$$

2.2.2 **Trägheitsmomente**

Zuerst bestimmen wir die Massen durch wiegen und die Längen bzw. Durchmesser mit dem Zentimetermaßstab der einzelnen Teile. Die Meßergebniss sind in der folgenden Tabelle Aufgeführt.

	Masse m	Länge 1 / Durchmesser d
Stab	175g	l= 61 cm
Zusatzmasse	238g	
Aufnahmeteller	109,7g	d=10cm
Hohlzylinder	390,8g	d=9cm
Vollzylinder	288g	d=9cm

Als nächstes bestimmen wir das Trägheitsmoment des Stabes ohne zusätzliche Massen. Dazu stellen wir das Drehpendel so auf, daß die Enden des Stabes die Lichtschranke der Stoppuhr unterbrechen kann. Auch hier wird nur jeder zweite Impuls der Lichtschranke verwendet; d.h.: Nachdem der Stab ausgelenkt wurde schwingt der Stab durch die Lichtschranke hindurch und unterbricht deren Strahl das erste Mal und startet die Stoppuhr. Wenn er die Ruhelage passiert, beginnt er die Feder zu spannen. Dabei verliert er an Bewegungsenergie bis er zum stehen kommt und die Federkraft den Stab zu umkehren bringt. Nun dreht er in die entgegengesetzte Richtung und unterbricht ein zweites Mal die Lichtschranke. Diese Unterbrechung wird jedoch noch nicht gewertet. Nachdem er nun die Ruheposition passiert hat beginnt er seine Bewegungsenergie wieder an die Feder zu verlieren bis er zum Stillstand kommt. Die gespannte Feder beschleunigt den Stab nun wieder in die entgegengesetzte Richtung. Auf seinem Weg unterbricht er dann wieder die Lichtschranke, was dazu führt, daß die seit der ersten Unterbrechung vergangene Zeit gespeichert wird. Der Stab ist nun einmal hin und her geschwungen, was einer Periode entspricht. Dies lassen wir nun noch viermal passieren und lassen uns die gestoppten Zeiten der einzelnen Perioden anzeigen. Diese waren für alle Perioden exakt gleich, nämlich **t=2,52 pro Periode**.

Aus der gemessenen Periodenzeit und den Maßen des Stabs und seiner Masse läßt sich das Trägheitsmoment bestimmen. Dabei nutzen wir die Formel, die für das elastische Pendel gilt. Sie läßt sich, wie die anderen Formeln sich auch auf Drehbewegungen übertragen lassen, auf das Drehpendel übertragen. Für das elastische Pendel gilt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Dabei tritt an die Stelle der Masse m das Massenträgheitsmoment I und anstelle des Drehmomentes tritt die Winkelrichtgröße D_r. Daraus folgt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I}{D_r}}$$

Da wir die Periodendauer T gemessen und die Winkelrichtgröße Dr ebenfalls schon bestimmt haben, können wir daraus das Trägheitsmoment I errechnen.

$$I = \frac{T^2 \cdot D_r}{4 \cdot \pi^2} = \frac{(2{,}52s)^2 \cdot 0{,}0255Nm}{4 \cdot \pi^2} = 4{,}102 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2$$

Man kann aber auch das Trägheitmoment rein mathematisch bestimmen.

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2$$

Das Trägheitsmoment ist danach die Summe der Trägheitsmomente aller Teilchen. Das einzelne Trägheitsmoment ist dabei das Produkt aus der Teilchenmasse und dem Quadrat des Abstandes zur Drehachse des Teilchens. Für homogene Körper kann auf diese Weise mit Hilfe der Integralrechnung das Trägheitsmoment bestimmt werden. Für die gebräuchlichsten Körperformen gibt es aber auch fertige Formel, die einen recht guten Näherungswert liefern.
Für einen langen dünnen Stab, bei dem die Drehachse senkrecht durch die Körperachse geht, gilt:

$$I = \frac{1}{12} m_{ges} \cdot l^2$$

In unserem Fall also:

$$I = \frac{1}{12} \cdot m_{ges} \cdot l^2 = \frac{1}{12} \cdot 0{,}175kg \cdot (0{,}61m)^2 = 5{,}426 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2$$

Wie man sieht weicht dieser Wert (0,005426 kg m²) ein wenig von unserem Gemessenem (0,004102 kg m²) ab. Dabei läßt sich jetzt nicht so einfach sagen welcher der beiden Werte näher am tatsächlichen liegt, da der errechnete nur durch eine Näherungsformel bestimmt wurde, der gemessene aber durch Meßungenauigkeiten auch fehlerhaft ist.

Der nächste Versuch ist dem zuvor beschriebenen sehr ähnlich. Der Unterschied liegt allein darin, daß auf dem Stab nun im Abstand r von der Drehachse noch zusätzliche Massen mit m=238g auf beiden Seiten symetrisch angebracht werden. Auch hier wurden wieder 5 Perioden gemessen. In der folgenden Tabelle sind die Zeiten, die für eine Periode bei einem bestimmten Abstand r der Massen benötigt wurden, aufgeführt.

r	t pro Periode	m

0,05m	2,88s	2 x 238g
0,10m	3,70s	2 x 238g
0,15m	4,76s	2 x 238g
0,20m	5,93s	2 x 238g
0,25m	7,15s	2 x 238g
0,30m	8,41s	2 x 238g

Auch hier berechnen wir das Trägheitsmoment wieder mit der oben genannten Formel

$$I = \frac{T^2 \cdot D_r}{4 \cdot \pi^2}.$$

Die Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt. Die Massen waren dabei immer die gleichen.

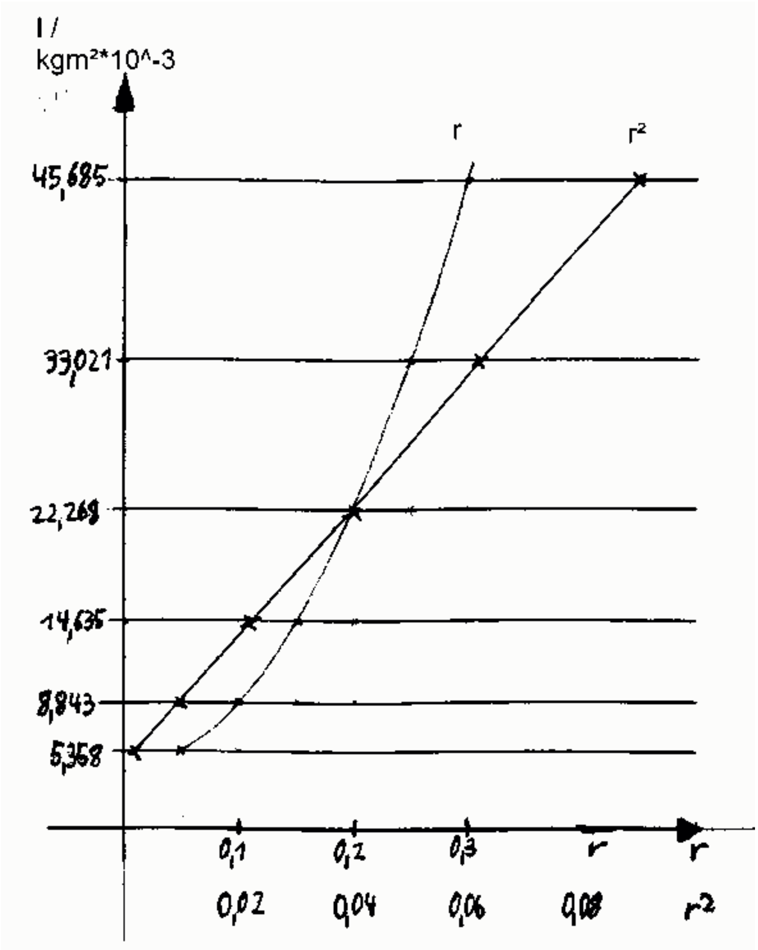
Auch hier können wir wieder rein rechnerisch das Trägheitsmoment bestimmen. Dazu betrachten wir den Stab und die beiden Massen getrennt. Das Massenträgheitsmoment des Stabes allein kennen wir schon aus dem vorangegangenen Versuch. Die zusätzlichen Massen betrachten wir vereinfacht als Massepunkte. Dann können wir mit

$$I = \sum m_i \cdot r_i^2$$

das Trägheitsmoment der Zusatzmassen berechnen. Das Gesamtträgheitsmoment ergibt sich dann näherungsweise aus $I=I_{Stab}+I_{Zusatz}$ bestimmen.

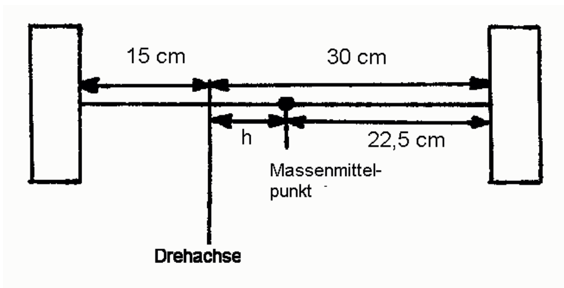
r	T	$I_{gemessen}$	$I_{errechnet}$
0,05m	2,88s	$5,358 \cdot 10^{-3}$kgm²	$6,616 \cdot 10^{-3}$kgm²
0,10m	3,70s	$8,843 \cdot 10^{-3}$kgm²	$10,186 \cdot 10^{-3}$kgm²
0,15m	4,76s	$14,635 \cdot 10^{-3}$kgm²	$16,136 \cdot 10^{-3}$kgm²
0,20m	5,93s	$22,268 \cdot 10^{-3}$kgm²	$24,466 \cdot 10^{-3}$kgm²
0,25m	7,15s	$33,021 \cdot 10^{-3}$kgm²	$35,176 \cdot 10^{-3}$kgm²
0,30m	8,41s	$45,685 \cdot 10^{-3}$kgm²	$48,266 \cdot 10^{-3}$kgm²

Wie man sieht, weicht der errechnete Wert doch ziemlich ab, was wohl einerseits durch die Näherungsformel des Stabes verursacht wir, andererseits durch die starke Vereinfachung der Massen zu Massenpunkten.



In diesem Diagramm sind auf der x-Achse r bzw. r^2 und auf der y-Achse das Massenträgheits-moment I aufgetragen. Wie man sehen kann ist I in Abhänigkeit von r^2 eine Gerade. Daraus folgt I ist annähernd proportional zu r^2.

Der gleiche Versuch wird anschließend mit einer <u>unsymetrischen</u> Massenverteilung durchgeführt. Die Massen selbst sind dabei die gleichen geblieben, nur die Abstände der Massen zur Achse werden wie folgt geändert:



$r1=0{,}15m$ $r2=0{,}3m$

Dabei ergibt sich eine Zeit für eine Periode von :

$t=6{,}68s$

$$I = \frac{T^2 \cdot D_r}{4 \cdot \pi^2} = \frac{(6{,}68s)^2 \cdot 0{,}0255Nm}{4 \cdot \pi^2} = 28{,}82 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2$$

Auch diesen Fall wollen wir rein rechnerisch einmal beleuchten. Dazu verwenden wir den Steiner'schen Satz (im Englischen „Parallel-Axis-Theorem“), der lautet:

$$I = I_s + m_{ges} \cdot h^2$$

Is ist dabei die Massenträgheit, die der Körper aufweisen würde, wenn er sich um seinen Massenmittelpunkt drehen würde. Dazu wird dann ein zusätzliches Massenträgheitsmomnet addiert, das sich aus der Gesamtmasse und h² ergibt. h ist der Abstand zwischen der Drehachse und dem Massenmittelpunkt des Körpers.
Daraus folgt wir müssen zuerst einmal Is berechnen.

$$I_s = \sum m_i \cdot r_i^2 + I_{Stab} = 0{,}238kg \cdot (0{,}225m)^2 \cdot 2 + 5{,}426 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2 = 29{,}52 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2$$

$$I = I_s + m_{ges} \cdot h^2 = 29{,}52 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2 + 2 \cdot 0{,}238kg \cdot (0{,}075m)^2 = 32{,}2 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2$$

Und wie eigentlich fast schon zu erwarten war, weicht auch dieser Wert von unserem gemessenem Wert ab.

Nun nehmen wir den Stab vom Drehpendel und stecken statt dessen einen Aufnahmeteller auf. Der Aufnahmeteller kann einen Hohl- oder einen Vollzylinder aufnehmen. Doch zuerst bestimmen wir die Periodendauer des Aufnahmetellers ohne Zylinder, auch wieder mit Hilfe der Lichtschranke und Stoppuhr. Für den Aufnahmeteller messen wir eine Zeit von:

t=0,51s

$$I = \frac{T^2 \cdot D_r}{4 \cdot \pi^2} = \frac{(0{,}51s)^2 \cdot 0{,}0255Nm}{4 \cdot \pi^2} = 0{,}168 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2$$

Rechnerisch kann man dies auch mit folgender Formel für einen Vollzylinder errechnen:

$$I = \frac{1}{2} \cdot m_{ges} \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1097kg \cdot (0{,}05m)^2 = 0{,}135 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2$$

Nun montierten wir auf den Aufnahmeteller den Hohlzylinder. Hier ergibt sich eine Zeit für eine Periode von :

t=1,19s

$$I = \frac{T^2 \cdot D_r}{4 \cdot \pi^2} = \frac{(1{,}19s)^2 \cdot 0{,}0255Nm}{4 \cdot \pi^2} = 0{,}897 \cdot 10^{-3}\, kg \cdot m^2$$

Für den Hohlzylinder gibt es folgende Näherungsformel:

$$I = m_{ges} \cdot r^2 = 0{,}3908kg \cdot (0{,}045m)^2 = 0{,}791 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

Dabei ist das Trägheitsmoment des Tellers aber noch unberücksichtigt geblieben, wenn man dieses noch dazu addiert ist
<u>I=0,926*10^{-3}kgm².</u>

Anschließend montierten wir statt des Hohlzylinders einen Vollzylinder. Dabei ergibt sich eine Periodendauer von:

t=0,93s

$$I = \frac{T^2 \cdot D_r}{4 \cdot \pi^2} = \frac{(0{,}93s)^2 \cdot 0{,}0255Nm}{4 \cdot \pi^2} = 0{,}559 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

Auch hier berechnen wir wieder rein mathematisch das Massenträgheitsmoment.

$$I = \frac{1}{2} \cdot m_{ges} \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}388kg \cdot (0{,}045m)^2 = 0{,}393 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

Auch hier müssen wir noch das Massenträgheitsmoment des Teller dazurechnen.
$I_{ges} = 0{,}528kg \cdot m^2$