

Protokoll zum Praktikum Grundlagen der Meßtechnik

Versuch Nr.: 3 Der Phasenschieber

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Kenngößen der Wechselstromtechnik

1.1.1 Periode, Scheitelwert und Phasenverschiebung

Da es sich beim Wechselstrom um eine sinusförmige Wechselgröße handelt, kann man die Begriffe Periode, Scheitelwert und Phasenverschiebung wie folgt definieren. Allgemein bedeutet der Begriff Periode, daß eine Wechselgröße in einem bestimmten Zeitabschnitt immer wieder denselben Augenblickswert annimmt. Im Fall der hier betrachteten Wechselstromtechnik handelt es sich um eine Wechselgröße, die sich im Abstand von 20ms wiederholt. Diese Zeit bezeichnet man auch als Periodendauer (T). Eine bestimmte Anzahl von Perioden pro Sekunde liefert uns die Frequenz ($f=1/T$). In diesem Fall handelt es sich um eine Frequenz, von 50 Hz. Da man bei einem periodischen Vorgang auch Spitzenwerte erhält, bezeichnet man diese in der Wechselstromtechnik auch als Scheitelwert, Amplitude oder Maximalwert. Diese Werte werden durch \hat{U} über dem Formelzeichen verdeutlicht (\hat{U} , \hat{I}). Liegen der Verlauf der Spannung und des Stromes zeitlich übereinander, so spricht man von Phasengleichheit. Erreicht der Wert der einen \hat{U} gegenüber \hat{I} zeitlich verschoben, so spricht man von einer Phasenverschiebung. Dieser Wert wird mit dem Zeichen φ charakterisiert.

1.1.2) Wirkwiderstand

Ein sinusförmiger Strom verursacht an einem Schaltwiderstand einen sinusförmigen Spannungsabfall, der die gleiche Phasenlage wie der Strom hat. Deshalb an einem Schaltwiderstand der gleiche Zusammenhang des Ohm'schen $R = U/I$ gilt. Man bezeichnet diesen Schaltwiderstand, der dem Ohm'schen R entspricht, als Wirkwiderstand.

1.1.3) Induktiver und kapazitiver Blindwiderstand:

Da man in Wechselstromnetzwerken auch Spulen und Kondensatoren verwenden kann, stellen diese aber einen Widerstand für frequenzabhängige Ströme und Spannungen dar.

Bei einer Spule wird der Widerstand als induktiver Blindwiderstand x_L bezeichnet. Der Hauptverursacher dieses Blindwiderstandes ist die Selbstinduktionsspannung U_L , die dem Strom entgegenarbeitet. Dabei erzeugt der Strom einen phasengleichen magnetischen Fluß Φ , der eine Selbstinduktionsspannung entstehen läßt, die ihrerseits hemmend auf den Strom einwirkt. Durch diese „Blockade“ erreicht der Strom seinen Maximalwert immer erst eine Viertelperiode ($\varphi=90^\circ$) später als die Spannung. Man erhält für den induktiven Blindwiderstand:

$$x_L = U_L / I_L = \omega L = 2\pi fL$$

Betrachtet man nun den Kondensator im Wechselstromkreis, so wird der Widerstand als kapazitiver Blindwiderstand x_C bezeichnet. Durch den ständig wechselnden Sinusstrom wird der Kondensator ständig umgeladen. Die dabei entstehende sinusförmige Spannung U_C , hat die gleiche Frequenz wie der Strom. Der Kondensator hat dann seinen maximalen Spannungswert U_C , wenn der Strom $I=0$ wird. Von diesem Zeitpunkt an nimmt die Kondensatorspannung U_C nicht zu, wodurch im Zeigerbild der Strom um $\varphi=90^\circ$ der Spannung vorausseilt. Sein kapazitiver Blindwiderstand ist definiert als:

$$x_C = U_C/I = (\omega C)^{-1} = (2\pi f C)^{-1}$$

1.1.4) Scheinwiderstand

Das allgemeine Verhältnis von U/I im Wechselstromkreis wird als Scheinwiderstand Z bezeichnet. Dabei wird berücksichtigt, daß in einem Wechselstromkreis ein Wirkwiderstand R , ein induktiver und ein kapazitiver Widerstand vorkommen kann. Es wird aus diesem [REDACTED] folgt:

$$Z = U/I = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$$

1.1.5) Rechenmethoden

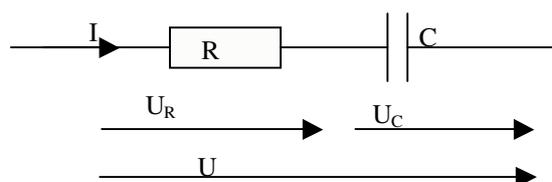
Um die Berechnung solcher Wechselgrößen zu vereinfachen, stellt man Ströme, Spannungen und Widerstände als Zeiger der Amplitudenwerte dar. [REDACTED] G
hierbei ist ein linksdrehendes Zeigersystem, dessen Zeigeranfänge alle im Bezugspunkt zusammentreffen. Außerdem ist der Bezugspunkt gleichzeitig der Schnittpunkt von reeller und imaginärer Achse. Der Winkel der Zeiger zueinander ist gleich dem Phasenverschiebungswinkel der Wechselgrößen. Es gilt, daß Wirkwiderstände stets auf der reellen positiven Achse liegen, Blindwiderstände stets auf der negativen (kapaz.) oder positiven (indukt.) Imaginärachse. Es gelten hierbei die Vektor- und Komplexrechenregeln, auf die hier einzugehen den Rahmen überschreiten würde.

Strom und Spannung werden deshalb im Wechselstromkreis entweder in Betrag und Phase oder in Real- und Imaginäranteil angegeben.

Bsp.: $\vec{U} = \hat{U} * e^{\pm j\varphi_U}$ oder $\vec{I} = \hat{I} * e^{\pm j\varphi_I}$

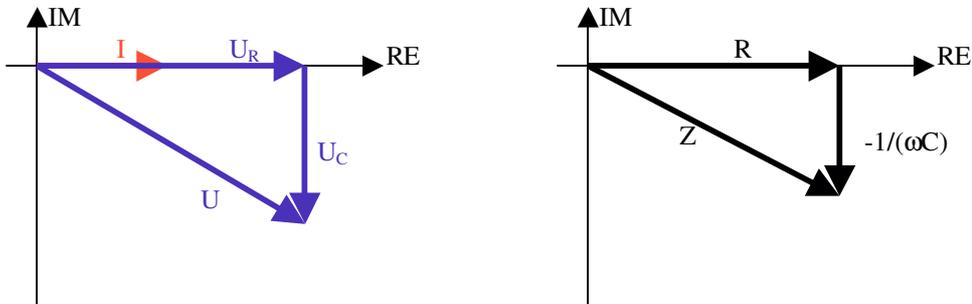
1.2) Das RC-[REDACTED] G

Man bezeichnet in der Wechselstromtechnik folgende Schaltung als RC-[REDACTED] G



Mit Hilfe des zweiten Kirchhoff'schen Satzes weiß man, daß die Summe der Spannungsabfälle am Widerstand R und am kapazitiven Blindwiderstand x_C

zusammen die eingespeiste Spannung U ergeben. Wie aber unter 1.1.3) erläutert, liegt am Kondensator eine Phasenverschiebung vor, die dafür sorgt, daß eine einfache Summation der beiden Spannungen nicht möglich ist. Es ist nur eine geometrische Addition der beiden Spannungen möglich. Dies wird im Folgenden Schaubild deutlich.



Man erhält nach Pythagoras für U :

$$U^2 = U_R^2 + U_C^2 = I^2 * R^2 + I^2 * x_C^2 = I^2 \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]$$

Man kann erkennen, daß man für die Widerstände ein gleiches Zeigerdiagramm wie für die Spannungen erhält.

Betrachtet man die $Z^2 = R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}$ so fällt auf, daß der in der Klammer stehende Term eine gewisse Ähnlichkeit mit dieser $x_C^2 = \frac{1}{(\omega C)^2}$ in unserer Schaltung keine Induktivität haben erhält man für den Scheinwiderstand Z^2 den in Klammern stehenden Term :

$$Z = \sqrt{R^2 + x_C^2} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$$

Da man in einem rechtwinkligen Dreieck auch trigonometrische Beziehungen ermitteln kann, so erhält man für den Tangens des Winkels φ :

$$\tan \varphi = \frac{-U_C}{U_R} = \frac{-I * x_C}{I * R} = \frac{-x_C}{R} = \frac{-1}{\omega C R}$$

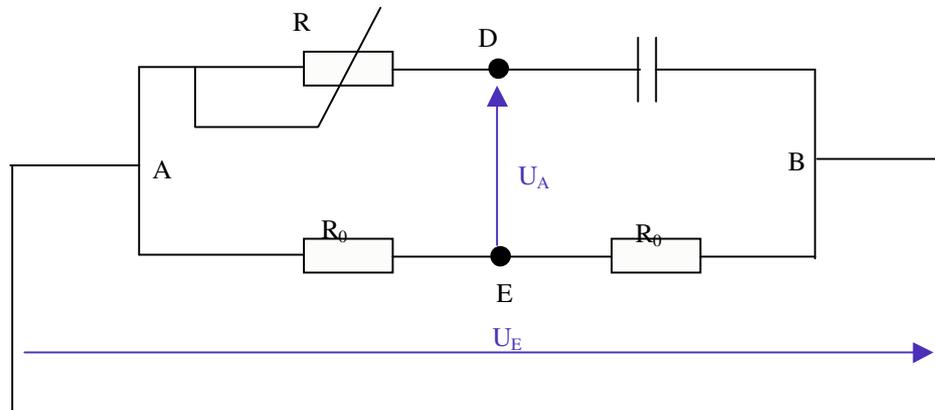
Die Phasenverschiebung φ wird also hauptsächlich durch die Widerstände R und x_C ergeben sich bestimmte tan-Werte:

- $x_C = R \quad \rightarrow \tan \varphi = -1$ und somit $\varphi = -45^\circ$
- $x_C \gg R \quad \rightarrow \tan \varphi \approx -\infty$ und somit $\varphi = -90^\circ$
- $x_C \ll R \quad \rightarrow \tan \varphi \approx 0$ und somit $\varphi = 0^\circ$

1.3) Phasenschieber

Beim Phasenschieber handelt es sich um eine Schaltung, bei der man Ausgangsspannung U_A in ihrer Phasenlage zur Eingangsspannung U_E drehen kann.

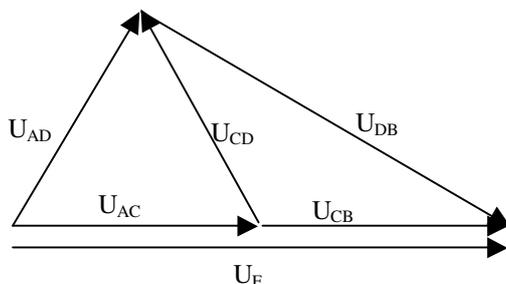
Dies wird durch die folgende Schaltung ermöglicht. Aus dem Kirchhoff'schen Maschensatz folgt: $U_A = U_{AD} - U_{AC}$



Wobei $U_{AC} = 1/2 U_E$ ist, weil die Reihenschaltung der beiden Widerstände aus zwei gleichen Widerständen aufgebaut ist. Mit Hilfe der Spannungsteilerregel erhält man

$$\text{für } U_{AD} = U_E \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

Trägt man nun die einzelnen Spannungen phasenrichtig in ein Zeigerbild ein, so erhält man folgendes Zeigerdiagramm:



Hieraus wird ersichtlich, daß die Spannung U_E gleich der Summe der beiden Spannungen U_{AC} und U_{CB} ist. Auch sieht man, daß die beiden Spannungen U_{AD} und U_{DB} um 90° phasenverschoben sind. Aber ihre geometrische Addition liefert wieder $U_E = U_{AD} + U_{DB}$.

Die Ausgangsspannung U_A wird zwischen den Punkten C und D gemessen, wodurch $U_A = U_{CD}$ wird.

Die Phasenlage der Spannung U_A ist offensichtlich über den Widerstand R einstellbar. Man kann die Phasenlage im Bezug auf U_E in folgenden **■** G

$$R_3 \ll X_C \rightarrow \varphi = \text{Winkel}(U_A, U_E) \approx 0^\circ$$

$$R_3 \gg X_C \rightarrow \varphi = \text{Winkel}(U_A, U_E) \approx 180^\circ$$

Nebenbemerkung

$$Z = \hat{U} / \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

somit ergibt sich für die Amplitude

$$\hat{i} = \frac{\hat{U}}{Z} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Nun die Berechnung im Zeitbereich

Für die Reihenschaltung aus Widerstand und Kondensator erhält man folgende Differentialgleichung:

$$u = R * i + \frac{1}{C} \int i dt$$

mit $u = u_R + u_C$ und $u = \hat{u} * \sin(\omega t + \varphi_u)$

Wie bereits in der komplexen Berechnung ermittelt gilt (mit den Effektivwerten):

$$u = i \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right) \iff i = \frac{u}{R - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{\hat{u} * e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} * e^{j \arctan((-1/\omega C)/R)}}$$

mit $\varphi_r = \arctan(-1/\omega RC)$ sowie $Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$ erhält man $i = \frac{\hat{u}}{Z} e^{j(\omega t + \varphi_u - \varphi_r)}$.

Durch Rücktransformation erhält man:

$$i = \frac{\hat{u}}{Z} \sin(\omega t + \varphi_u - \varphi_r) \quad ; \quad i = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} * \sin(\omega t + \varphi_u - \arctan(\frac{-1}{\omega RC}))$$

Mit Hilfe dieser Stromgleichung kann man nun die Spannungen u_r und u_c berechnen:

$$u_R = R * i = \frac{R * \hat{u}}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \sin(\omega t + \varphi_u - \arctan(-\frac{1}{\omega RC}))$$

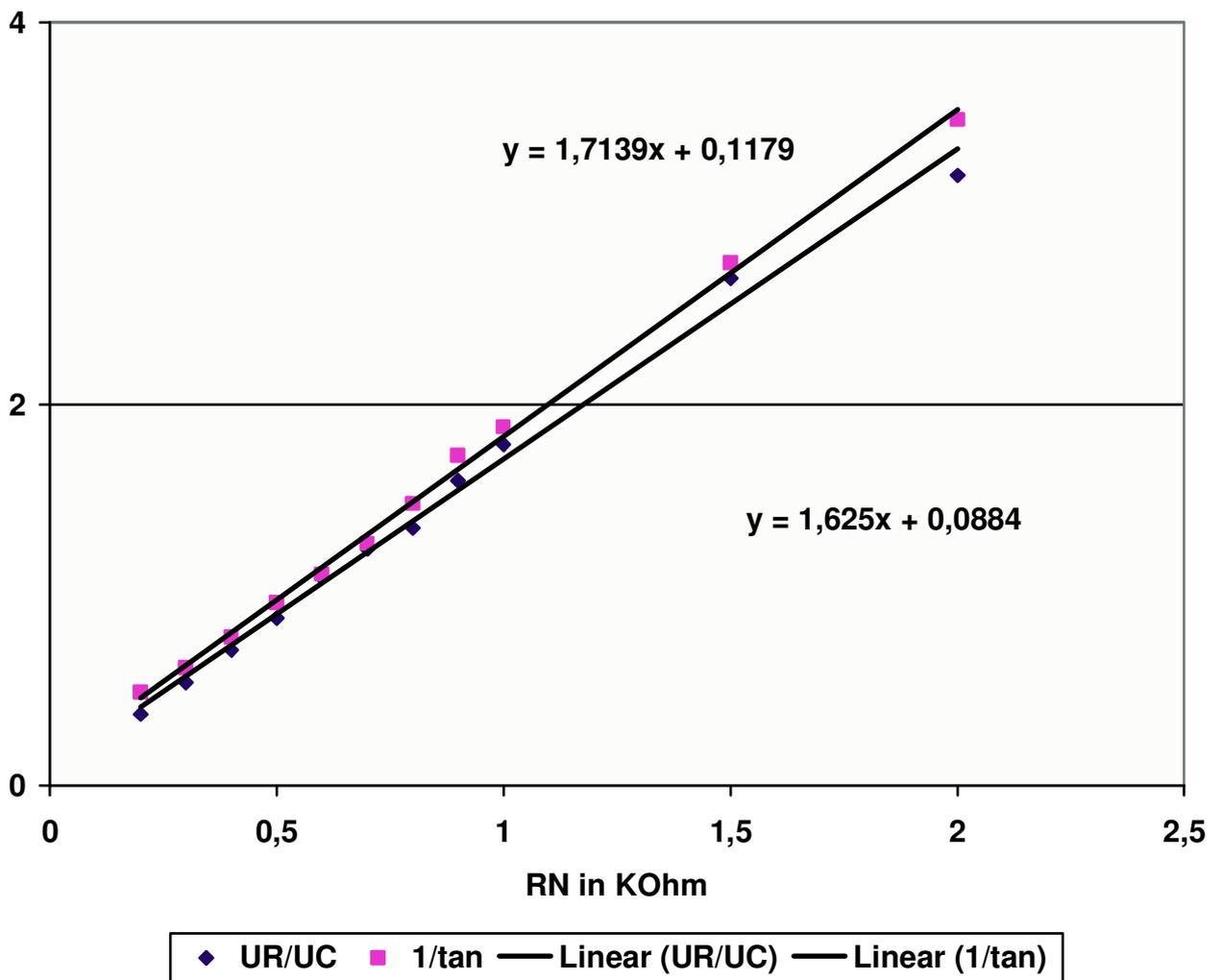
$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt = - \frac{\hat{u}}{\omega C \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \cos(\omega t + \varphi_u - \varphi_r)$$

mit $\varphi_r = \arctan(-1/\omega RC)$. Mit der Berücksichtigung von $-\cos(x) = \sin(x - \pi/2)$ erhält man für u_c :

$$u_c = \frac{\hat{u}}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} * \sin(\omega t + \varphi_u - \arctan(-1/\omega RC) - \pi/2)$$

2.1.3.2 [redacted] Nr.1

In der ersten [redacted] Anungsverhältnis U_R/U_C sowie die Funktion $1/\tan\alpha$ in Abhängigkeit von ausgewählten Widerstandswerten R_N aufgetragen. Anschließend wurden die Regressionsgeraden und deren [redacted] [redacted] gelt.



Wie man aus dem Zeigerdiagramm für das RC-[redacted], erkennen kann, gelten folgende Beziehungen:

$$U_R = I \cdot R_N \quad \leftrightarrow \quad I = U_R / R_N \quad : \quad U_C = I / \omega C \quad \leftrightarrow \quad I = U_C \cdot \omega C$$

Daraus erhält man folgende Beziehungen:

$$U_R / U_N = U_C \cdot \omega C \quad \leftrightarrow \quad U_R / U_N = \omega C R_N$$

$$\text{Ebenfalls gilt : } \tan\alpha = 1 / \omega RC \quad \leftrightarrow \quad 1 / \tan\alpha = R_N \omega \cdot C$$

Aus den obigen Beziehungen wird ersichtlich, daß lineare Zusammenhänge bestehen, weil folgendes gilt:

$$U_R/U_C \sim R \rightarrow U_R/U_C = k \cdot R$$

$$\text{Und } 1/\tan\alpha \sim R \rightarrow 1/\tan\alpha = k \cdot R$$

Wenn man die genannten Beziehungen betrachtet, wird deutlich, daß der Faktor k genau identisch mit $\omega C = 2\pi f C$ ist. Aus diesem k der Steigung der $\tan\alpha$ des verwendeten Kondensators bestimmen: Unter Berücksichtigung von $f=50\text{Hz}$ kann man die Kapazität wie folgt bestimmen:

$$k = 2\pi f C \rightarrow C \approx k/2\pi f$$

$$k_1 = 0,001713 \text{ } 1/\Omega \quad 2 \cdot \pi \cdot 50\text{Hz} = 314,159 \text{ } 1/\text{s}$$

$$k_2 = 0,001625 \text{ } 1/\Omega$$

$$C_1 = \frac{0,001713 \frac{1}{\Omega}}{314,159 \frac{1}{\text{s}}} \approx 5,452 \mu\text{F}$$

$$C_2 = \frac{0,001625 \frac{1}{\Omega}}{314,159 \frac{1}{\text{s}}} \approx 5,172 \mu\text{F}$$

Die Abweichungen vom vorgegebenen Wert sind hauptsächlich auf die Ableseungenauigkeit zurückzuführen.

2.1.3.3) $\tan\alpha$ Nr. 2 (Blatt A)

In dieser $\tan\alpha$ Amplituden mit ihrer Phasenlage eingetragen. Als gemeinsame Hypotenuse wurde die Spannung \hat{U}_{AB} genommen. Wir haben die Amplitude \hat{U}_R mit ihrem Winkel α eingetragen und dann die Spannung \hat{U}_C im rechten Winkel an den Zeiger von U_R angesetzt. Was deutlich wird, ist daß wenn man den Wert von R_N variiert, der Punkt C innerhalb eines Toleranzbereiches auf einem Thaleskreis „wandert“.

2.1.3.4) Fehlerbetrachtung

Die deutlichen Abweichungen der gemessenen und dargestellten Werte und Ergebnisse von den theoretisch erwarteten kann man wie folgt erklären:

1. Die im Versuch verwendeten Meßgeräte haben aufgrund ihrer Konstruktion Anzeigefehler.
2. Die anliegende Klemmenspannung U_{AB} war keine ideale sinusförmige Wechselspannung.
3. Alle verwendeten Verbindungsleitungen stellen einen zusätzlichen Widerstand dar. Dies gilt auch für die Eingänge der Meßgeräte.
4. Die Meßleitungen des Oszilloskops bilden eine zusätzliche Kapazität.
5. Die Hauptfehlerquelle in diesem Versuch ist die Ableseungenauigkeit der Meßergebnisse aus dem Kurvenverlauf auf dem Oszilloskop.

2.2) Der Phasenschieber

2.2.1) Versuchsaufbau

Die Meßschaltung wurde gemäß Versuchsanleitung S.3/2 aufgebaut.

2.2.2) Versuchsdurchführung

Nachdem wir die Meßschaltung aufgebaut hatten, schlossen wir ein Oszilloskop an die Klemmen A, B an, um den Kurvenverlauf der Quellenspannung zu erhalten. Damit wir die Phasenverschiebungswinkel α und β aufnehmen konnten, schlossen wir den zweiten Eingang zunächst an die Klemmen A und C an. Dadurch erhielten wir den Phasenverschiebungswinkel α . Nachdem wir für ausgewählte R_N -werte den Winkel α bestimmt hatten, wechselten wir die Anschlüsse und legten den 1. Eingang des Oszilloskops an die Klemmen AB und den 2. Eingang an die Klemmen CD. Durch einen Ablesefehler lasen wir nicht den Phasenverschiebungswinkel β sondern den Wert für $180^\circ\beta$ ab. Die Spannungsamplituden \hat{U}_{AB} , \hat{U}_{AD} , \hat{U}_{DC} , wurden parallel zur Messung der Winkel mit aufgenommen.

2.2.3.) Auswertung

2.2.3.1) Schaltungsberechnung im komplexen und im Zeitbereich

Die im Punkt 3.1) aufgeführten Beziehungen für die Spannung U_A können hier übernommen werden.

$$\hat{U}_A = \hat{U}_{AD} - \hat{U}_{AC}, \text{ wobei}$$

$$\hat{U}_{AC} = \frac{1}{2} \hat{U}_e \text{ und } \hat{U}_{AD} = \hat{U}_e * \frac{R_N}{R_N + \frac{1}{j\omega C}}, \text{ durch einsetzen erhält man :}$$

$$\hat{U}_A = \hat{U}_e \left(\frac{R_N}{R_N + \frac{1}{j\omega C}} - \frac{1}{2} \right) = \hat{U}_e * \frac{1}{2} \left(\frac{-1 + j\omega C R_N}{1 + j\omega C R_N} \right) = \hat{U}_e * \frac{1}{2} \left(\frac{1 + j \frac{1}{\omega R_N C}}{1 - j \frac{1}{\omega R_N C}} \right)$$

Mit Hilfe der folgenden mathematischen Beziehung kann man den Klammerterm durch eine e-Funktion ersetzen:

$$\frac{1 + jz}{1 - jz} = e^{(j2 * \arctan(z))} \text{ mit } 2\arctan(z) = \varphi; \quad z = (\omega R_N C)^{-1}$$

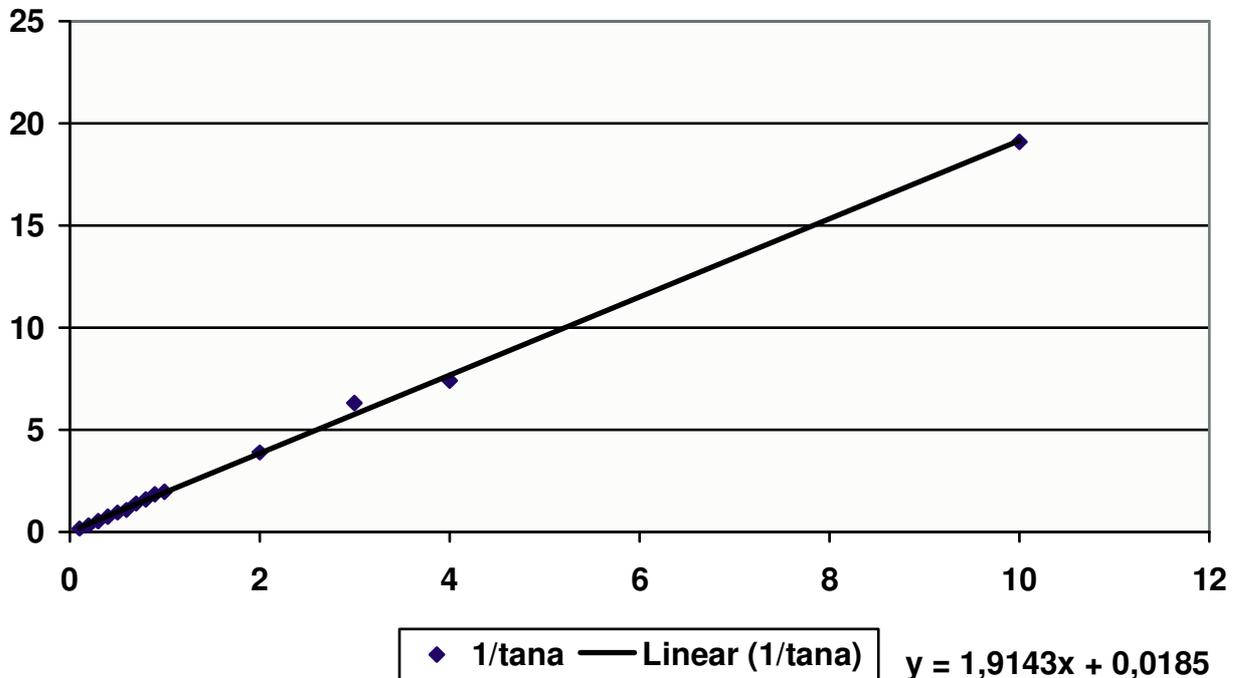
Man erhält somit :

$$\hat{U}_A = \hat{U}_e * \frac{1}{2} e^{j2 \arctan(\omega R_N C)^{-1}}$$

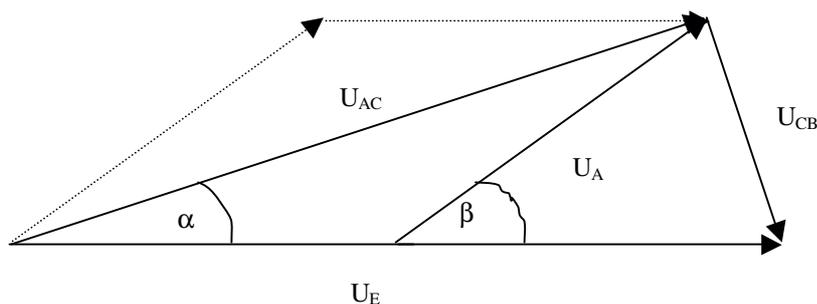
für das Verhältnis $\hat{U}_A / \hat{U}_e = \frac{1}{2} * e^{j2 \arctan(1/(\omega R_N C))}$

Diese hier durchgeführte Betrachtung mit den Spitzenwerten ist auf die gleiche Art und Weise auch für Effektivwerte möglich. Der Vergleich für den Zeitbereich liefert die schon genannte Beziehung für $\hat{U}_A : \hat{U}_A = 1/2 \hat{U}_e$

2.2.3.2) Zusammenhang zwischen α und β



Nach den Überlegungen für die Verhältnisse im Zeigerdiagramm können wir festhalten, daß sich die Teilspannung \hat{U}_E über den beiden Widerständen R1 und R2 in gleich große Teilspannungen \hat{U}_{AD} und \hat{U}_{DB} aufspaltet. Die Spannungen am Widerstand Rn und am Kondensator C verhalten sich wie beim RC-~~Netz~~ rechten Winkel aufeinander und ergeben in der geometrischen Summe wieder \hat{U}_e . Da sich nun die Variation von Rn der Punkt C über einem Thaleskreis verschiebt, stellt sich nun die Frage, im welchem Verhältnis die Winkel α und β zu einander stehen. Da normalerweise alle Zeiger eines Zeigerdiagrammes im Ursprung des Koordinatensystemes beginnen, sie aber für die anschauliche Darstellung parallel verschoben wurden, kann man nun die Zeiger auch wieder in den Ursprung zurück verschieben.



Verschiebt man nun den Zeiger U_a in den Ursprung, so ergibt sich ein Parallelogramm. Da der Zeiger \hat{U}_{ac} genau die Eckpunkte des Parallelogramms verbindet, stellt er somit eine Winkelhalbierende dar. Dies ist aber hier nur möglich, weil der Zeiger $\hat{U}_{AD}=\hat{U}_A$ ist, weil sich dadurch eine Spezialform des Parallelogramms ergibt, nämlich der Rhombus, bei dem das Winkelverhältnis $\alpha=\beta/2$ gilt.

Obige , daß der Verlauf der Funktion $(\tan\alpha)^{-1}=(\tan\beta/2)^{-1}$ identisch mit dem des RC- G

2.2.3.3) Nr3 (Blatt B)

Das dargestellte Zeigerbild stellt die Spannungsamplitude \hat{U}_{DC} in Abhängigkeit des Winkels β dar. Was sehr deutlich wird, ist daß für steigende Werte von R_N der Winkel β immer kleiner wird. Auch die „Wanderung“ des Punktes C auf einem Thaleskreis wird deutlich.

2.2.3.4) Fehlerbetrachtung

Die Abweichungen der errechneten und ermittelten Werte zu den erwarteten ist auch auf die unter 2.1.3.4) genannten Fehlerquellen zurückzuführen. Die Abweichung wird hier besonders auf Blatt B deutlich, wo der Punkt C nur innerhalb eines großen Toleranzbereiches auf dem Thaleskreis „wandert“.

Nachweis über verwendete Literatur: Arbeitshilfen und Formeln für das technische Studium, Wolfgang Böge, Vieweg Verlag; Elektrotechnik für Ingenieure 1, W.Weißgerber, Vieweg Verlag; Elektrotechnik für Studienanfänger, J.Eichmeier, Schiele & Schön;
--