

Verwendet Meßgeräte und Bauteile

Gerät	Typ / Hersteller	Inventarnummer
Digitalmultimeter	M3610D Voltcraft	
Digitalmultimeter	VC200	
Analogmultimeter	Metravo 1H-LH	020000203
Oszilloskop	HM303-4 Hameg	020000059
Wechselspannungszetzelteil	hera	020000093 (Tischnummer)
Gleichspannungsnetzteil	hera	020000093 (Tischnummer)

I. Kondensator im Wechselstromkreis

Um Kapazitäten zu berechnen, kann man einfach eine Schaltung nach Bild 1 aufbauen und dann Strom und Spannung mit Hilfe von Multimetern messen. Bei der Durchführung haben wir uns entschieden die spannungsrichtige Messung durchzuführen, da ein relativ kleiner Wert für X_c zu erwarten ist. Die Werte der Messung werden dann in die folgende Tabelle (Tabelle 1) eingetragen und daraus die Kapazitäten, nach Formel 10.1, der Kondensatoren berechnet.

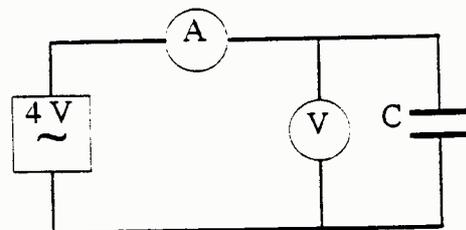


Bild 1

	Spannung [V]	Fehler +/- [V]	Strom [mA]	Fehler +/- [mA]	Kapazität [μ F]	Fehler +/- [μ F]
Kondensator A	4,46	0,01	20,3	1,0	14,49	0,71
Kondensator B	4,49	0,01	11,9	1,0	8,44	0,71
Reihenschaltung	4,50	0,01	6,0	1,0	4,24	0,71
Parallelschaltung	4,39	0,01	32,5	1,0	23,57	0,73

Tabelle 1

Die Formel für die Berechnung der Kapazitäten ergibt sich aus der Definition des Blindwiderstandes X_c wie folgt:

$$\frac{U}{I} = X_c = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\Rightarrow C = \frac{I}{U \cdot \omega} \quad \omega = 2\pi f$$

Formel 10.1

Da es sich um die Netzfrequenz von 50 Hz handelt ist $\omega = 314,159s^{-1}$

Um die Meßergebnisse zu überprüfen, ist es sinnvoll, die Kapazitäten für Reihen- und Parallelschaltung über die allgemein gültigen Formeln nachzuprüfen. Für die Reihenschaltung ergibt sich folgendes Ergebnis:

$$C_{ges} = \frac{C_A \cdot C_B}{C_A + C_B} = \frac{14,49\mu F \cdot 8,44\mu F}{14,49\mu F + 8,44\mu F} = \underline{\underline{5,33\mu F}}$$

Dass der berechnete Meßwert nicht mit dem gemessenen übereinstimmt, kann daran liegen, daß durch den Spannungsmesser ein Fehlerstrom von unbekannter Größe geflossen ist. Bei der Parallelschaltung kann die Kapazität auch durch folgende Formel bestimmt werden:

$$C_{ges} = C_A + C_B = 14,49 \mu F + 8,44 \mu F = \underline{\underline{22,93 \mu F}}$$

Wenn man diesen Wert mit dem Wert aus der Tabelle 1 vergleicht, stellt man fest, daß er noch innerhalb der Toleranz liegt.

Wenn man die Formel für den Wechselstromwiderstand für einen Kondensator herleiten will, sollte man dies im Komplexen tun.

$$u(t) = \text{Im}\{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}\} = \text{Im}\{\hat{u} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$i(t) = \text{Im}\{\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}\} = \text{Im}\{\hat{i} \cdot e^{j\omega t}\} = C \cdot \frac{du}{dt} = C \cdot \text{Im}\{j\omega \cdot \hat{u} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\hat{i} = j\omega \cdot C \cdot \hat{u} \Rightarrow \hat{u} = \frac{1}{j\omega \cdot C} \cdot \hat{i} \Leftrightarrow U = R \cdot I$$

$$\Rightarrow \underline{X_C} = \frac{1}{j\omega \cdot C}$$

Formel 10.2

In Formel 10.2 ist nur der reine Blindwiderstand von Kapazitäten dargestellt. Will man allerdings den tatsächlichen Widerstand darstellen, muß man davon ausgehen, daß es keine idealen Bauteile gibt. Deshalb ist es notwendig, ein Ersatzschaltbild zu konstruieren. Dabei geht man davon aus, daß in einem Wechselstromkreis ein ohmscher Widerstand in Reihe zu den Kapazitäten geschaltet ist. In diesem Zusammenhang ist allerdings zu bemerken, daß die beiden Widerstände geometrisch Addiert werden müssen (Satz des Pythagoras). Aus dieser Überlegung ergibt sich dann aus Formel 10.2 folgendes Resultat.

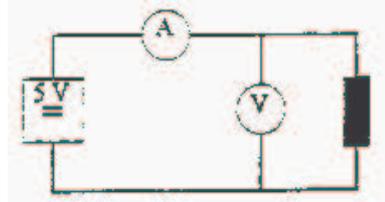
$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2}$$

Formel 10.3

Als nächstes haben wir uns die Phasenverschiebung von Strom und Spannung am Oszilloskop betrachtet, indem wir die Spannung am Ausgang des Travos abgriffen und den Strom als Spannungsabfall am Amperemeter gemessen haben. Dabei stellten wir fest, daß der Strom der Spannung um 90° vorausseilt. Dies ist damit zu erklären, daß der Kondensator im ersten Moment geladen wird, und danach erst die Spannung zwischen den Platten abfällt usw. Mit einem Phasenverschiebungswinkel von 90° ist der verwendete Kondensator einem idealem Kondensator sehr ähnlich.

II. Spule im Wechselstromkreis

Um die Induktivität einer Spule im Wechselstromkreis zu bestimmen, muß als erstes der rein ohmsche Widerstand der Spule bestimmt werden. Dies wird am besten mit einer spannungsrichtigen Messung in einem Gleichstromkreis realisiert. Die spannungsrichtige Messung ist der stromrichtigen Messung in diesem Falle vorzuziehen, weil die Spule nur aus einem gewickeltem Kupferleiter hergestellt ist und deshalb davon ausgegangen werden kann, daß sie einen relativ kleinen Widerstand besitzt, der in einer Stromrichtigen Messung das Ergebnis verfälschen würde. Die Messung für den ohmschen Widerstand der Spule ist wie in Abb. 2 dargestellt realisiert worden. Die dabei aufgenommenen Werte sind in Tabelle 2 aufgelistet und daneben sind auch gleich die ohmschen Widerstand und die Fehler dargestellt.



	U [V]	Fehler +/- [mV]	I [mA]	Fehler +/- [mA]	R [Ohm]	Fehler +/- [Ohm]
Spule 1 (1200)	5,05	0,01	440,0	10,0	11,48	0,2618
Spule 2 (1800)	4,95	0,01	76,1	0,1	65,05	0,1568
Spule 3 (3600)	5,01	0,01	38,4	0,1	130,47	0,4281

Tabelle 2

Da nun die ohmschen Widerstände bekannt sind, läßt sich auch die Induktivität der Schaltung berechnen. Dabei muß, wie zuvor, ein Ersatzschaltbild konstruiert werden, in dem der ohmsche Widerstand aus der Spule ausgekoppelt wird, und dadurch die Spule als ideale Induktivität betrachtet werden kann. Nimmt man diese Voraussetzungen und stellt sie in Formeln dar, so ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$i(t) = \text{Im}\{\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}\} = \text{Im}\{\hat{i} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$u(t) = \text{Im}\{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}\} = \text{Im}\{\hat{u} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow \hat{u} = j\omega \cdot L \cdot \hat{i} \Leftrightarrow U = R \cdot I$$

$$\Rightarrow \underline{X}_L = j\omega \cdot L$$

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} = R + j\omega \cdot L$$

Formel 10.4

$$\Rightarrow Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{\frac{U^2 - I^2 \cdot R^2}{I^2 \cdot \omega^2}}$$

Formel 10.5

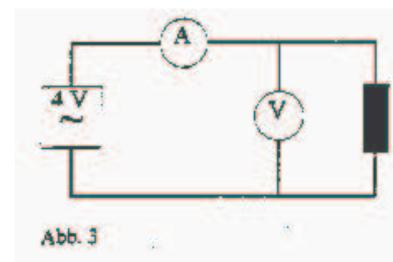


Abb. 3

Wenn man eine Schaltung nach Abb. 3 aufbaut, kann man mit Formel 10.5 und den Meßergebnissen die Induktivitäten der Spulen berechnen. Dies ist in Tabelle 3 geschehen, wobei dort auch gleichzeitig die Fehler mit berechnet worden sind.

	U [V]	+/- [v]	I [mA]	+/- [mA]	R [Ohm]	+/- [Ohm]	L [mH]	+/- [mH]
Spule 1 (1200 Wdg.)	4,48	0,01	260,0	1,0	11,48	0,262	40,90	0,07
Spule 2 (1600 Wdg.)	4,42	0,01	58,8	0,1	65,05	0,157	119,91	0,38
Spule 3 (3600 Wdg.)	4,47	0,01	27,6	0,1	130,47	0,428	305,44	2,53

Tabelle 3

Die nächste Aufgabe bestand darin, den Verlauf der Induktivität in Abhängigkeit der Eintauchtiefe eines Eisenkerns in die Spule zu berechnen und dann graphisch darzustellen. In der Tabelle 4 sind die dazu nötigen Werte und Ergebnisse abgetragen.

Spule 1 (1200 Wdg.)											
Eintauchtiefe [cm]	I [mA]	+/- [mA]	U [V]	+/- [v]	Z [Ohm]	+/- [Ohm]	L [mH]	+/- [mH]	R [Ohm]	+/- [Ohm]	
1,0	230,0	1,0	4,50	0,01	19,57	0,10	50,43	0,07	11,48	0,2618	
2,0	199,8	0,1	4,31	0,01	21,57	0,05	58,13	0,06	11,48	0,2618	
3,0	162,5	0,1	4,37	0,01	26,89	0,06	77,41	0,07	11,48	0,2618	
4,0	127,3	0,1	4,42	0,01	34,72	0,08	104,30	0,08	11,48	0,2618	
5,0	103,1	0,1	4,44	0,01	43,06	0,11	132,12	0,11	11,48	0,2618	
6,0	83,3	0,1	4,45	0,01	53,42	0,14	166,07	0,16	11,48	0,2618	
6,8	71,8	0,1	4,46	0,01	62,12	0,16	194,32	0,22	11,48	0,2618	
Spule 2 (1800 Wdg.)											
Eintauchtiefe [cm]	I [mA]	+/- [mA]	U [V]	+/- [v]	Z [Ohm]	+/- [Ohm]	L [mH]	+/- [mH]	R [Ohm]	+/- [Ohm]	
1,0	52,2	0,1	4,45	0,01	85,25	0,25	175,39	0,48	65,05	0,1568	
2,0	43,2	0,1	4,47	0,01	103,47	0,33	256,14	0,73	65,05	0,1568	
3,0	33,8	0,1	4,49	0,01	132,84	0,49	368,68	1,34	65,05	0,1568	
4,0	27,7	0,1	4,50	0,01	162,45	0,69	473,84	2,28	65,05	0,1568	
5,0	24,6	0,1	4,50	0,01	182,93	0,85	544,21	3,15	65,05	0,1568	
6,0	22,5	0,1	4,50	0,01	200,00	0,99	602,01	4,03	65,05	0,1568	
6,8	21,1	0,1	4,50	0,01	213,27	1,12	646,51	4,83	65,05	0,1568	
Spule 3 (3600 Wdg.)											
Eintauchtiefe [cm]	I [mA]	+/- [mA]	U [V]	+/- [v]	Z [Ohm]	+/- [Ohm]	L [mH]	+/- [mH]	R [Ohm]	+/- [Ohm]	
1,0	24,9	0,1	4,42	0,01	177,51	0,82	383,13	3,15	130,47	0,4281	
2,0	21,8	0,1	4,43	0,01	203,21	1,04	495,91	4,43	130,47	0,4281	
3,0	17,62	0,01	4,34	0,01	246,31	0,58	665,01	3,13	130,47	0,4281	
4,0	14,10	0,01	4,37	0,01	309,93	0,74	894,86	4,80	130,47	0,4281	
5,0	11,50	0,01	4,46	0,01	387,83	0,93	1162,54	7,42	130,47	0,4281	
6,0	9,41	0,01	4,48	0,01	476,09	1,18	1457,42	11,41	130,47	0,4281	
6,8	8,14	0,01	4,49	0,01	551,60	1,40	1705,97	15,72	130,47	0,4281	

Tabelle 4

Nachdem es sich bei den Spulen um keine idealen Spulen handelt, ist auf dem Oszilloskop auch eine Phasenverschiebung zu erkennen. Dies ist darauf zurückzuführen, daß am ohmschen Anteil auch eine Spannung abfällt und somit der Verschiebungswinkel nicht mehr -90° erreichen kann. Die Phasenverschiebung berechnet sich nach Formel 10.5

$$\tan \varphi = \frac{\omega \cdot L}{R}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan \frac{\omega \cdot L}{R}$$

Formel 10.5

Somit lassen sich die Verschiebungswinkel berechnen.

Spule	Phasenwinkel [deg]
1200 Wdg.	48,2
1800 Wdg.	30,1
3600 Wdg.	36,2

Tabelle 5

Fehlerbetrachtung

Wie in jedem Versuchsaufbau treten auch hier Fehler auf, die durch den Schaltungsaufbau und die verwendeten Meßgeräte sowie dem angewandtem Meßverfahren zuzuschreiben sind. In diesem Abschnitt werden nur die Formeln für die Fehler hergeleitet. In die Formeln werden keine Zahlenwerte eingesetzt, um die Formeln allgemein zu halten. Die Berechnung der Fehler geschieht daher direkt in den Tabellen auf der Grundlage der hier abgedruckten Formeln.

Fehler der Kapazität

$$Fehler \pm = \sqrt{\left(\frac{\partial \left(\frac{I}{U \cdot \omega} \right)}{\partial I} \cdot \Delta I \right)^2 + \left(\frac{\partial \left(\frac{I}{U \cdot \omega} \right)}{\partial U} \cdot \Delta U \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{U \cdot \omega} \cdot \Delta I \right)^2 + \left(-\frac{I}{U^2 \cdot \omega} \cdot \Delta U \right)^2}$$

Fehler des ohmschen Widerstand der Spule

$$Fehler \pm = \sqrt{\left(\frac{\partial \left(\frac{U}{I} \right)}{\partial U} \cdot \Delta U \right)^2 + \left(\frac{\partial \left(\frac{U}{I} \right)}{\partial I} \cdot \Delta I \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{I} \cdot \Delta U \right)^2 + \left(-\frac{U}{I^2} \cdot \Delta I \right)^2}$$

Fehler der Induktivität

$$\begin{aligned}
 \text{Fehler } \pm &= \sqrt{\left(\frac{\partial \left(\frac{U^2}{I^2 \cdot \omega^2} - \frac{R^2}{\omega^2} \right)}{\partial U} \cdot \Delta U \right)^2 + \left(\frac{\partial \left(\frac{U^2}{I^2 \cdot \omega^2} - \frac{R^2}{\omega^2} \right)}{\partial I} \cdot \Delta I \right)^2 + \left(\frac{\partial \left(\frac{U^2}{I^2 \cdot \omega^2} - \frac{R^2}{\omega^2} \right)}{\partial R} \cdot \Delta R \right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{2U}{I^2 \cdot \omega^2} \cdot \Delta U \right)^2 + \left(-\frac{2 \cdot U^2}{I^3 \cdot \omega^2} \cdot \Delta I \right)^2 + \left(\frac{2R}{\omega^2} \cdot \Delta R \right)^2}
 \end{aligned}$$

Die Fehlerrechnung wurde immer unabhängig von der Schwankung der Netzfrequenz betrachtet, da die Schwankungen dort so minimal sind, daß sie bei der Fehlerrechnung nicht ins Gewicht fallen (Hinweis: Sehr genaue Uhren bekommen ihre Zeittackung von der Netzfrequenz).

Literatur

Für die Theoretischen Grundlagen wurden folgende Hilfsmittel verwendet:

- Grundlagen der Elektrotechnik; Wolfgang Müller-Schwarz; 3. Auflage 1974; Siemens AG
- Skript der Vorlesung Einführung ET; Prof. Dr. Ing. Baum; Ausgabe 1998
- Versuchsbeschreibung für Versuch 10